Département de Mathématiques

Module : Algèbre 1
(Semestre 1)

Filière :
Sciences de Matière Physique et Chimie (SMPC)

Par :
M. Abdellah ALLA
Mme. Nadia BOUDI
M. Ahmed HAJJI
M. Houssame MAHZOULI.

Année universitaire 2020-2021

Université Mohammed V, Faculté des Sciences. 4 Avenue Ibn Battouta, B.P. 1014 RP Rabat– Maroc.
Tel : (+212) 05 37 77 18 34/35/38, Fax : (+212) 05 37 77 42 61.

Chapitre 1

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

1.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1.1 La structure de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est, par définition, formé des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$, où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, c'est à dire :*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Exemples 1.1.2

$$(2, \ \sqrt{6}) \in \mathbb{R}^2; \quad (\frac{2}{7}, \ \cos 1, \ \pi) \in \mathbb{R}^3.$$

Définition 1.1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois de composition, l'une interne et l'autre externe :*
i) La loi de composition interne est notée " $+$ ", et est définie par :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \ \forall \ x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}.$$

ii) La loi de composition externe est notée ".", et est définie par

$$\alpha.(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n), \ \forall \ \alpha, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Exemples 1.1.4 *1) Dans $\mathbb{R}^2$:*

$$(1,7)+(-3,0)=(-2,7);\quad 2.(5,3)=(10,6).$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$:

$$(0,8,-3)+(1,2,-6)=(1,10,-9);\quad -4.(5,-1,6)=(-20,4,-24).$$

Des propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$, on déduit :

Propriétés 1.1.5 (Propriétés de l'addition) *1) L'addition est associative, c'est à dire :*

$$\forall\ X,Y,Z\in\mathbb{R}^n:\ (X+Y)+Z=X+(Y+Z).$$

2) L'addition est commutative, c'est à dire :

$$\forall\ X,Y\in\mathbb{R}^n:\ X+Y=Y+X.$$

3) $0_{\mathbb{R}^n}=(0,\ldots,0)$ est un élément neutre de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall\ X\in\mathbb{R}^n:\ X+0=0+X=X.$$

4) Si $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, écrivons $-X=(-1).X=(-x_1,\ldots,-x_n)$. Alors $-X$ est un opposé de X pour la loi "$+$", c'est à dire :

$$\forall\ X\in\mathbb{R}^n,\ \ X+(-X)=(-X)+X=0_{\mathbb{R}^n}.$$

Remarque 1.1.6 *Souvent, on écrit 0 au lieu de $0_{\mathbb{R}^n}$.*

Exemples 1.1.7 *1) Dans $\mathbb{R}^2$,*

$$[(1,5)+(-1,7)]+(3,4)=(1,5)+[(-1,7)+(3,4)]=(3,16).$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$,

$$(6,7,8,9)+(0,1,-1,5)=(0,1,-1,5)+(6,7,8,9)=(6,8,7,14).$$

Des propriétés de la multiplication et l'addition dans $\mathbb{R}$, on déduit :

Propriétés 1.1.8 (Propriétés de la loi externe) 1) *Pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, $1.X = X$.
2) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$: $(\alpha + \beta).X = \alpha.X + \beta.X$.
3) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tous* $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\alpha.(X + Y) = \alpha.X + \alpha.Y$.
4) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$: $(\alpha\beta).X = \alpha.(\beta.X)$.

Exemples 1.1.9 *1)* $(2 \times 3).(-2, 0, 1) = 2.[3.(-2, 0, 1)] = (-12, 0, 6)$.
2) $3.[(1, 5) + (-1, 7)] = [3.(1, 5)] + [3.(-1, 7)] = (0, 36)$.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni des lois "+, ." est appelé espace vectoriel, et est noté $(\mathbb{R}^n, +, .)$. Ses éléments sont appelés vecteurs. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires.
Souvent, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, la loi externe "." est notée par juxtaposition, c'est à dire, on écrit αX au lieu de $\alpha.X$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout X dans $\mathbb{R}^n$.

La notion d'espace vectoriel, dans le cadre général, sera étudiée plus tard (Algèbre II). Pour ce semestre, nous allons juste énoncer la définition.

Définition 1.1.10 *Soit* $\mathbb{E}$ *un ensemble muni de deux lois de composition "+" et "."; où "+" est interne et "." est externe définie de* $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ *vers* $\mathbb{R}$. *On dit que* $(\mathbb{E}, +, .)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *si de plus, on a les propriétés :*
1) *L'addition est associative, c'est à dire :*

$$\forall X, Y, Z \in \mathbb{E} : \ (X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

2) *L'addition est commutative, c'est à dire :*

$$\forall X, Y \in \mathbb{E} : \ X + Y = Y + X.$$

3) *L'addition admet un élément neutre "U", c'est à dire :*

$$\exists\, U \in \mathbb{E} \text{ vérifiant } \forall X \in \mathbb{E} : \ X + U = U + X = X.$$

Cet élément neutre est noté $0_{\mathbb{E}}$ *où* 0 *s'il n'y a pas de risque de confusion.*
4) *Tout élément de* $\mathbb{E}$ *admet un opposé pour* $+$, *c'est à dire :*

$$\forall\, X \in \mathbb{E}, \ \exists\, Y \in \mathbb{E} \text{ vérifiant } X + Y = Y + X = U.$$

L'opposé de X *est noté* $-X$.

5) *Pour tout* $X \in \mathbb{E}$, $1.X = X$.
6) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{E}$: $(\alpha + \beta).X = \alpha.X + \beta.X$.
7) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tous* $X, Y \in \mathbb{E}$: $\alpha.(X + Y) = \alpha.X + \alpha.Y$.
8) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{E}$: $(\alpha\beta).X = \alpha.(\beta.X)$.
Les éléments de l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, .)$ *sont appelés vecteurs. Les éléments de* $\mathbb{R}$ *sont appelés scalaires.*

1.1.2 Familles libres et bases de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.11 *Soient* $r, n \in \mathbb{N}^*$. *On dit qu'une famille de vecteurs* $\{X_1, \ldots, X_r\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est linéairement indépendante (ou libre) si*

$$\alpha_1 X_1 + \ldots \alpha_r X_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}.$$

Si la famille $\{X_1, \ldots, X_r\}$ *n'est pas libre, on dit qu'elle est liée, ou linéairement dépendante.*

Remarque 1.1.12 *Avec les notations de la définition ci-dessus,* $\{X_1, \ldots, X_r\}$ *est liée si*

$$\exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0 \textit{ tel que } \alpha_1 X_1 + \ldots \alpha_r X_r = 0.$$

Exemples 1.1.13 *1) Dans* $\mathbb{R}^2$, *la famille* $\{(0, 2), (3, 0)\}$ *est libre, en effet :*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha(0, 2) + \beta(3, 0) &= 0 \\ &\Rightarrow (3\beta, 2\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow \beta = \alpha = 0. \end{aligned}$$

2) La famille $\{(2, -1, 4), (1, -\frac{1}{2}, 2)\}$ *n'est pas libre car*

$$(2, -1, 4) = 2\ (1, -\frac{1}{2}, 2).$$

Lemme 1.1.14 *Dans* $\mathbb{R}^n$, *le vecteur* $0_{\mathbb{R}^n}$ *ne peut pas appartenir à une famille libre.*

Preuve. Soient $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ et considérons la famille $\{0_{\mathbb{R}^n}, u_1, \ldots, u_r\}$. Soit α un scalaire quelconque non nul. Alors

$$\alpha\ 0_{\mathbb{R}^n} + 0\ u_1 + \ldots + 0\ u_r = 0,$$

par contre $(\alpha, 0, \ldots, 0) \neq 0$.

Lemme 1.1.15 *Soient X_1, X_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors $\{X_1, X_2\}$ est libre si, et seulement si, les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, c'est à dire*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ X_2 \neq \alpha.X_1 \quad et \quad X_1 \neq \alpha.X_2.$$

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons que $\{X_1, X_2\}$ est libre. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1, -\alpha) \neq 0$ et donc

$$X_1 - \alpha X_2 \neq 0 \text{ et } X_2 - \alpha X_1 \neq 0.$$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires. Supposons de plus qu'il existe $(\alpha, \beta) \neq 0$ tel que $\alpha X + \beta Y = 0$.
On a $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Supposons par exemple que $\alpha \neq 0$, alors

$$X + \frac{\beta}{\alpha} Y = 0,\ \text{c'est à dire } X = -\frac{\beta}{\alpha} Y,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Propriétés 1.1.16 *1) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, où $X \neq 0$, la famille formée d'un seul vecteur $\{X\}$ est libre.*
2) Soit $\{X_1, \dots, X_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors toute famille extraite de $\{X_1, \dots, X_r\}$ est libre.
3) Soit $\{X_1, \dots, X_r\}$ une famille liée de $\mathbb{R}^n$. Alors toute famille contenant $\{X_1, \dots, X_r\}$ est liée.

Preuve. 1) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$. Alors pour tout scalaire $\alpha \neq 0$, $\alpha X \neq 0$. D'où , $\{X\}$ est libre.
2) Supposons qu'on a extrait une famille $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_r\}$. Quitte à changer les indices, on peut supposer que la famille extraite est $\mathcal{C} = \{X_1, \dots, X_k\}$, où $k < r$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1\, X_1 + \dots \alpha_k\, X_k = 0.$$

Alors

$$\alpha_1\, X_1 + \dots \alpha_k\, X_k + 0\, X_{k+1} + \dots 0\, X_r = 0.$$

Comme $\mathcal{B}$ est libre, alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0) = 0$. D'où , $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$, et par suite $\mathcal{C}$ est libre.

3) Soit $\mathcal{D} = \{X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots X_t\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ est liée. Soient des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ vérifiant

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_r X_r = 0 \ \text{ et } \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0.$$

Alors

$$\alpha_1 \ X_1 + \ldots \alpha_r \ X_r + 0 \ X_{r+1} + \ldots 0 \ X_t = 0 \ \text{ et } \ (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Définition 1.1.17 *Dans $\mathbb{R}^n$, une famille libre ayant n éléments est appelée base de $\mathbb{R}^n$.*

Rappelons que si E est un ensemble fini, le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et est noté card E.

Exemples 1.1.18 *1) La famille $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, il est clair que $(1,0)$ et $(0,1)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\mathcal{B}$ est libre. Le cardinal de $\mathcal{B}$ est égal à 2, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}$ est appelée base "canonique" de $\mathbb{R}^2$.*
2) La famille $\mathcal{C} = \{(1,1,0), (0,2,2), (3,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, card $\mathcal{C} = 3$, *donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,1,1) = 0.$$

Donc $(\alpha + 3\gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 2\beta + \gamma) = (0,0,0)$. On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et par suite $\mathcal{C}$ est libre.

Lemme 1.1.19 *Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, elle est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0.$$

Alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$. D'où , $\mathcal{B}$ est libre. Or, $\mathcal{B}$ contient n éléments. D'où , $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

1.1.3 Coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans une base

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que

$$X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Remarquons aussi que cette écriture est unique, c'est à dire que si

$$X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n,$$

alors $(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

Lemme 1.1.20 *Soit $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour un vecteur X de $\mathbb{R}^n$, il existe $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n \in \mathbb{R}$ tel que $X = \sum_{i=1}^n y_i u_i = \sum_{i=1}^n y'_i u_i$. Alors $y_i = y'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} X = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i u_i \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (y_i - y'_i) u_i = 0 \\ &\Rightarrow \quad y_i - y'_i = 0,\ \forall 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Nous admettrons le Théorème suivant :

Théorème 1.1.21 *Soit $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, il existe $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tel que $X = \sum_{i=1}^n y_i u_i$. De plus, la famille de scalaires $y_1, \ldots, y_n$ vérifiant l'égalité ci-dessus est unique.*

Définition 1.1.22 *Soient $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soient $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tel que $X = \sum_{i=1}^n y_i u_i$. Alors le n-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ est appelé coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, le scalaire y_i est associé à u_i.*

Exemples 1.1.23 *1) Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $(x_1, \ldots, x_n)$ représente les coordonnées de X dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.*
2) Donnons les coordonnées (α, β) de $(5, 7)$ dans la base $\mathcal{C} = \{(5, 0), (0, 14)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (5,7) &= \alpha\,(5,0) + \beta\,(0,14) \Rightarrow \\ (5,7) &= (5\,\alpha, 14\,\beta) \Rightarrow \\ \alpha = 1 \quad &; \quad \beta = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Etant donné une base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, et un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, pour trouver $y_1, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{R}$ tel que $X = \sum_{i=1}^n y_i u_i$, on résoud le système correspondant, après avoir remplacé X et les u_i par leurs valeurs.

Vocabulaire. 1) Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et soit $X \in \mathbb{R}^n$. S'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tel que $X = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$, alors on dit que X s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$.
2) Si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$, on dit que la famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ou engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$).

Remarque 1.1.24 *Remarquons que toute base de $\mathbb{R}^n$ engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.*

Notation. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$, où $r \in \mathbb{N}$. On note

$$\mathrm{Vec}\{u_1, \ldots, u_r\} = \{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, \text{ où } \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Vec}\{u_1, \ldots, u_r\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_r$.

Exemples 1.1.25 *1) $\{(1, -1), (0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, donc c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire*

$$\mathrm{Vec}\{(1, -1), (0, 1)\} = \mathbb{R}^2.$$

2) $\mathrm{Vec}\{0_{\mathbb{R}^n}\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

3) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vec}\{(1, 1, -1)\} = \{(\alpha, \alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1.2 La structure de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, +, ., \langle ., . \rangle)$

1.2.1 Produit scalaire, Norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.1 *Soient $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*
1) *Le produit scalaire de X et Y est la quantitée notée $\langle X, Y \rangle$ et définie par*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2) *La norme de X est la quantité notée $\|X\|$ et définie par :*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

3) *La distance entre X et Y est la quantité notée $d(X,Y)$ et est définie par*

$$d(X,Y) = \|X - Y\|.$$

4) *L'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni des opérations $+$, $.$, et du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ est appelé espace euclidien.*

Exemples 1.2.2 *Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$,*

$$\langle (1,2),(3,0) \rangle = 3;\ \|(3,4)\| = \sqrt{9+16} = 5;\ d((1,2),(-1,3)) = \|(-2,1)\| = \sqrt{5}.$$

Propriétés 1.2.3 (Propriétés du produit scalaire) *Pour tous éléments X, Y, Z de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :*
1) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
2) $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$.
3)$\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$.
4)$\langle \alpha.X, Y \rangle = \langle X, \alpha.Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$.
5) $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle \geq 0$, on dit que le produit scalaire est positif.
6) $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$.

Preuve. Posons $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $Z = (z_1, \ldots, z_n)$. Alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle Y, X \rangle.$$

$$\langle X + Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle.$$

La troisième assertion découle des deux premières.

$$\langle \alpha.X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i = \alpha \langle X, Y \rangle.$$

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2.$$

D'où , si $\|X\| = 0$ alors $\|X\|^2 = 0$ et par suite $x_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, c'est à dire $X = 0$.

Les propriétés ci-dessus nous permettent d'établir les égalités suivantes :

Proposition 1.2.4 *Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a :*
1) $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$.
2) $\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$.
3) $\langle X + Y, X - Y \rangle = \|X\|^2 - \|Y\|^2$.
4) $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|X + Y\|^2 - \|X - Y\|^2\big)$ *(identité de polarisation).*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|X + Y\|^2 &= \langle X + Y, X + Y \rangle \\
&= \langle X + Y, X \rangle + \langle X + Y, Y \rangle \\
&= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|X - Y\|^2 &= \|X + (-Y)\|^2 \\
&= \|X\|^2 + 2\langle X, -Y \rangle + \| - Y\|^2. \\
&= \|X\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X + Y, X - Y \rangle &= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle X, -Y \rangle + \langle Y, -Y \rangle \\
&= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle - \langle X, Y \rangle - \langle Y, Y \rangle \\
&= \|X\|^2 - \|Y\|^2.
\end{aligned}$$

La quatrième identité découle de 1) et 2).

Exemple 1.2.5 *Calculons $\langle (2, 3, 0), (1, 1, 5) \rangle$ de deux manières différentes :*
1) Directement : $\langle (2, 3, 0), (1, 1, 5) \rangle = 2 + 3 + 0 = 5$.
2) En utilisant l'identité de polarisation :

$$\|(2, 3, 0) + (1, 1, 5)\|^2 = \|(3, 4, 5)\|^2 = 50, \ \|(2, 3, 0) - (1, 1, 5)\|^2 = \|(1, 2, -5)\|^2 = 30,$$

$$\textit{par suite } \langle (2, 3, 0), (1, 1, 5) \rangle = \frac{1}{4}(50 - 30) = 5.$$

Définition 1.2.6 *Un vecteur* v *de* $\mathbb{R}^n$ *est dit unitaire si sa norme* $\|v\|$ *est égale à* 1.

Remarque 1.2.7 *Si* v *est un vecteur quelconque non nul de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\frac{v}{\|v\|}$ *est un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^n$*. On dit qu'on a normalisé le vecteur* v*.*

Théorème 1.2.8 (Inégalité de Cauchy Schwartz) *Pour tous* $X, Y \in \mathbb{R}^n$*, on a :*

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \, \|Y\|.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si X *et* Y *sont colinéaires.*

Preuve. Soient X et Y deux vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, $\|X + tY\|^2 \geq 0$. Donc

$$\|X\|^2 + 2t\langle X, Y \rangle + t^2\|Y\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ D'où}$$

$$\Delta' = \langle X, Y \rangle^2 - \|X\|^2 \, \|Y\|^2 \leq 0.$$

C'est à dire, $\langle X, Y \rangle^2 \leq \|X\|^2 \, \|Y\|^2$. D'où l'inégalité souhaitée.

Remarque 1.2.9 *On utilise aussi la forme suivante de l'Inégalité de Cauchy Schwarz : Pour tous* $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a :*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

1.2.2 Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

Soient X et Y deux vecteurs non nuls de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$-1 \leq \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \, \|Y\|} \leq 1.$$

Il existe donc un unique réel θ dans l'intervalle $[0, \pi]$, tel que :

$$\frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \, \|Y\|} = \cos\theta.$$

θ est appelé *mesure de l'angle* non orienté des vecteurs X et Y, ou écart angulaire entre X et Y. On déduit la célèbre formule :

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \, \|Y\| \, \cos\theta.$$

Exemple 1.2.10 *Dans $\mathbb{R}^2$, l'angle non orienté des vecteurs $u = (2,2)$ et $v = (0,1)$ est $\theta = \frac{\pi}{4}$. En effet, d'après la formule ci-dessus, on a :*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où : $\theta = \frac{\pi}{4}$

Définition 1.2.11 *On dit que deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, et on écrit $X \perp Y$.*

Remarque 1.2.12 *Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $X \perp 0$.*

Exemples 1.2.13 *Dans $\mathbb{R}^2$: $\langle (1,-1),(1,1)\rangle = 0$. Donc les vecteurs $(1,-1)$ et $(1,1)$ sont orthogonaux.*
Dans $\mathbb{R}^3$: $\langle (-1,0,1),(0,1,0)\rangle = 0$. Donc les vecteurs $(-1,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont orthogonaux.

Proposition 1.2.14 *1) L'angle formé par deux vecteurs non nuls orthogonaux X et Y est égal à $\frac{\pi}{2}$.*
2) Deux vecteurs X et Y sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \text{ (théorème de Pythagore).}$$

Preuve. 1) Soient X et Y deux vecteurs non nuls vérifiant $\langle X, Y\rangle = 0$. Si θ est l'angle formé entre X et Y, alors $\cos\theta = 0$, et par suite, $\theta = \frac{\pi}{2}$.
2) Soient X et Y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux. Alors d'après la Proposition 1.2.4- 1) , on a l'identité souhaitée.

La notion d'orthogonalité se généralise à une famille quelconque de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

Définition 1.2.15 *Une famille de vecteurs $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est dite orthogonale si et seulement si $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.*

Exemple 1.2.16 *La famille de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1,0,0,2)$, $u_2 = (-1,0,0,\frac{1}{2})$, $u_3 = (0,1,1,0)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$. En effet :*

$$\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0.$$

Proposition 1.2.17 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est libre.*

Preuve. Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ on a

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = 0.$$

Alors $\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, u_1 \rangle = 0 = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle$. D'où , $\alpha_1 = 0$ et $\sum_{i=2}^{r} \alpha_i u_i = 0$. De même,

$$\langle \sum_{i=2}^{r} \alpha_i u_i, u_2 \rangle = 0 = \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle.$$

Par suite, $\alpha_2 = 0$. En itérant le procédé, on déduit que $\alpha_3 = \ldots = \alpha_r = 0$.

1.2.3 Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

Nous avons la définition suivante :

Définition 1.2.18 *Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$.*

- *$\mathcal{B}$ est appelée base orthogonale si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille orthogonale.*
- *$\mathcal{B}$ est appelée base orthonormale si $\mathcal{B}$ est orthogonale et $\|u_i\| = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Exemples 1.2.19 *1) $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. En effet, elle est orthogonale et*

$$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1.$$

2) Plus généralement, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale.

L'importance des bases orthonormales provient du fait que l'expression du produit scalaire dans ces bases (en fonction des coordonnées) devient simple. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale :

• Si $X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ et $Y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$, alors :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

• Si $X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, alors $\langle X, e_i \rangle = x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a donc :

✓ $X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \, e_i.$

✓ $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \, \langle Y, e_i \rangle.$

✓ $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle^2}.$

Remarque 1.2.20 *Etant donné une famille orthogonale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut facilement construire une famille orthonormale en normalisant les vecteurs u_i : $u'_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. Ainsi, la famille $\{u'_1, \ldots, u'_n\}$ est orthonormale.*

Exemple 1.2.21 *La famille de vecteurs $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ où*

$$u_1 = (1, 0, 2),\ u_2 = (-1, 0, \frac{1}{2}),\ u_3 = (0, 1, 0)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En effet, elle est orthogonale puisque

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0,$$

et son cardinal est égal à 3. Mais B n'est pas orthonormale puisque

$$\|u_1\| = \|(1, 0, 2)\| = \sqrt{5} \neq 1.$$

On peut déduire de B une base orthonormale, il suffit de diviser chacun des vecteurs par sa norme. Donc, la famille de vecteurs $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$, où

$$u'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2),\ u'_2 = \sqrt{\frac{4}{5}}(-1, 0, \frac{1}{2}),\ u'_3 = u_3,$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Lemme 1.2.22 *Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$. Soient $v, u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{N}$. Supposons que $v \perp u_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Alors pour toute combinaison linéaire u de $u_1, \ldots, u_r$, on a $v \perp u$.*

Preuve. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

$$\langle \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle u_i, v \rangle = 0.$$

Définition 1.2.23 *Soient M et N deux parties de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que M et N sont orthogonales et on note $M \perp N$ si pour tout $X \in M$ et pour tout $Y \in N$, on a $X \perp Y$.*

1.2.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 1.2.24 *Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ vérifiant :*
1) $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_i\}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$.
2) $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *est une famille orthonormale.*
3) $\langle v_i, u_i \rangle > 0$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$.
La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est appelée orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Preuve (résumée). Le procédé suivant donne la famille orthonormale que l'on veut obtenir (on peut faire une preuve rigoureuse par récurrence).
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
Etape 1 : Posons
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$
Alors le vecteur u_1 est unitaire. De plus, il est clair que u_1 est l'unique vecteur unitaire vérifiant
$$\langle v_1, u_1 \rangle > 0 \text{ et } \mathrm{Vect}\{u_1\} = \mathrm{Vect}\{v_1\}.$$
Etape 2 (si $r \geq 2$) : Posons $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Alors
$$\langle u_2', u_1 \rangle = 0 \text{ et } \langle v_2, u_2' \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, u_2' \rangle = \langle u_2', u_2' \rangle > 0.$$
Ensuite posons
$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$
Alors la famille $\{u_1, u_2\}$ est orthonormale, de plus $\langle v_2, u_2 \rangle > 0$. Vérifions que
$$\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\} &= \{\alpha u_1 + \beta u_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha' v_1 + \beta' u_2' : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha' v_1 + \beta'(v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1) : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\gamma v_1 + \delta v_2 : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.
\end{aligned}$$

Pour l'unicité, remarquons que l'unique réel α vérifiant $\langle v_2+\alpha u_1, u_1\rangle = 0$ est $\alpha = -\langle u_1, v_2\rangle$. D'autre part, $\langle \alpha u_1, u_1\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \neq 0$. D'où, les éléments de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ qui sont orthogonaux à u_1 sont de la forme $\alpha u_2'$. Pour qu'on ait $\langle v_2, \alpha u_2'\rangle > 0$, il faut avoir $\alpha > 0$. Et enfin, u_2 doit être unitaire, d'où l'unicité de son choix.

Etape 3 (si $r \geq 3$) : Posons

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2, \text{ alors } \langle u_1, u_3'\rangle = \langle u_2, u_3'\rangle = 0.$$

De plus,

$$\langle v_3, u_3'\rangle = \langle v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2, u_3'\rangle = \langle u_3', u_3'\rangle > 0.$$

Ensuite posons

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}.$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ devient orthonormale. De plus, $\langle v_3, u_3\rangle > 0$ et on vérifie que

$$\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

Pour l'unicité, on procède comme ci-dessus, en étudiant d'abord les éléments de la forme $\alpha u_1 + \beta u_2 + v_3$ qui sont orthogonaux à u_1 et u_2.

Etape i (si $r \geq i$) : La famille $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ est orthonormale. Posons $u_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1}\langle v_i, u_k\rangle u_k$, alors $\langle u_i', u_t\rangle = 0$ pour tout $t \in \{1, \ldots, i-1\}$. On vérifie que

$$\langle v_i, u_i'\rangle = \langle v_i - \sum_{k=1}^{i-1}\langle v_i, u_k\rangle u_k, u_i'\rangle = \langle u_i', u_i'\rangle > 0.$$

Ensuite, posons $u_i = \frac{u_i'}{\|u_i'\|}$. Alors la famille $\{u_1, \ldots, u_i\}$ est orthonormale. De plus,

$$\langle v_i, u_i\rangle > 0, \text{ et } \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_i\}.$$

Exemples 1.2.25 *1) Dans $\mathbb{R}^2$, orthonormalisons la base $B = \{(1,1), (2,0)\}$.*
Posons

$$u_1 = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Posons

$$u_2' = (2,0) - \frac{1}{2}\langle (2,0), (1,1)\rangle (1,1) = (2,0) - (1,1) = (1,-1).$$

Soit $u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.
Ainsi, $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$ *est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base* B.

2) Dans $\mathbb{R}^3$*, orthonormalisons la base* $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$. *Soit*

$$u_1 = \frac{(1, 0, 1)}{\|(1, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

Posons

$$u_2' = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}\langle(1, 0, 1), (0, 1, -1)\rangle(1, 0, 1) = (0, 1, -1) + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}).$$

Soit

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}).$$

Posons

$$u_3' = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}\langle(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}), (0, 1, 1)\rangle(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}) - \frac{1}{2}\langle(1, 0, 1), (0, 1, 1)\rangle(1, 0, 1).$$

Alors

$$u_3' = \frac{2}{3}(-1, 1, 1) \text{ et } u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1).$$

Donc l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base B *est la famille*

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}), \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)\}.$$

Finalement, résumons le procédééd'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Etape 1 : Posons

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Etape 2 : (si $r \geq 2$) : Posons $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$. Ensuite posons

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$

Etape 3 (si $r \geq 3$) : Calculons

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2,$$

ensuite calculons $u_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|}$

$$\vdots$$

Etape i (si $r \geq i$) : Posons $u'_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, u_k \rangle u_k$, ensuite posons $u_i = \frac{u'_i}{\|u'_i\|}$.

$$\vdots$$

Etape r : On itère le procédé jusqu'à l'ordre r.

La famille obtenue $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est appelée orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Remarque 1.2.26 *Si on change l'ordre de la famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$, il est clair que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt change aussi.*

Chapitre 2

Nombres complexes.

2.1 Introduction

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, tous les nombres positifs ont une racine carrée. Par contre, aucun réel négatif n'a pas de racine carrée (réel). Les nombres complexes offrent la possibilité de pallier à cette insuffisance .

Définition 2.1.1 (Le nombre i)

— *Le nombre i est un nombre dont le carré vaut* -1. *Ainsi,*
  $i^2 = -1$.

— *De plus, son opposé* $-i$ *a aussi pour carré* -1. *En effet :* $(-i)^2 = i^2 = -1$.

— *Les deux racines de* -1 *sont les deux nombres irréels i et* $-i$.

Un peu d'histoire : La notation i fut introduite par Euler en 1777, puis reprise par Gauss au début du XIX^{eme} siècle. Cependant, le premier à parler de nombre imaginaire fut Descartes en 1637.

Définition 2.1.2 (Nombres complexes) *Il existe un ensemble noté* $\mathbb{C}$, *appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*

— $\mathbb{C}$ *contient l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

— *$\mathbb{C}$ contient le nombre irréel i (tel que $i^2 = -1$)*
— *L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.*
— *Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a+ib$ avec a et b deux réels.*

2.2 Formes algébrique d'un nombre complexe

Définition 2.2.1 (Forme algébrique) *Soit z un nombre complexe. L'écriture $z = a+ib$ avec a et b sont des réels est appelé forme algébrique de z.*
• *a est la partie réelle de z, notée $Re(z)$, b est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.*
• *Si $b = 0$, le nombre z est un réel. Si $a = 0$, le nombre z est dit imaginaire pur. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.*

Exemple 2.2.2 *$Re(1+2i) = 1$ et $Im(1+2i) = 2$.*

Les calculs avec les nombres complexes se font comme avec les nombres réels avec la convention $i^2 = -1$.

Exemple 2.2.3 $(1+2i)(5-3i) = 5-3i+10i-6i^2 = 11+7i$.

Le résultat suivant justifie l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Proposition 2.2.4 (Egalité de deux complexes) *Soient x, y, x' et y' des nombres réels. Alors,*

$$x+iy = x'+iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

En particulier, $x+iy = 0$ équivaut à $x = y = 0$.

Preuve. Supposons que $x+iy = x'+iy'$. Alors, $x-x' = i(y-y')$. Ainsi, $(x-x')^2 = i^2(y-y')^2 = -(y-y')^2$. Par suite,
$(x-x')^2+(y-y')^2 = 0$. Par conséquent, $x-x' = y-y' = 0$. Le sens inverse et clair.

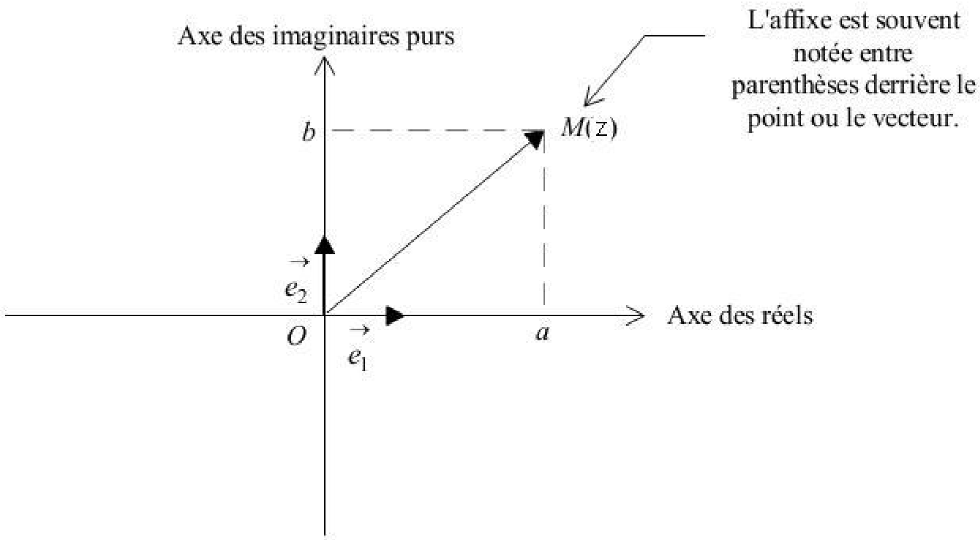
Remarques 2.2.5 *Dans l'ensemble $\mathbb{C}$,*

1. *il n'y a plus la notion d'ordre usuelle (On ne pourra pas comparer un nombre complexe à un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc. ...excepté pour les imaginaires purs où l'on peut définir l'ordre naturel comme pour les réels).*

2. *on évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\ }$ qui reste réservé aux réels positifs.*

Définition 2.2.6 (Représentation géométrique des nombres complexes) *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ direct.*

À tout nombre complexe $z = a+bi$ (avec a et b réels), on peut associer le point $M(a;b)$.
- Le point $M(a;b)$ s'appelle l'image du nombre complexe $z = a+bi$.
- Le nombre complexe $z = a+bi$ s'appelle l'affixe du point $M(a;b)$. ("Affixe" est un nom féminin)
- On note souvent $z = affixe(M)$ ou $z = aff(M)$.
- L'axe des abscisses est dénommé axe des réels (puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des réels).
-L'axe des ordonnées est dénommé axe des imaginaires purs (puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des imaginaires purs).



Si $z_A = x_A + iy_A$ est l'affixe du point A et $z_B = x_B + iy_B$ est l'affixe du point B, on peut associer au vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$, dit affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et on note

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$$

Cela permet de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs :

$$aff(\vec{u}+\vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

Exemple 2.2.7 *Soient $A(2,-1)$ et $B(-1,3)$. Donc, $aff(A) = 2-i$ et $aff(B) = -1+3i$. En plus,*

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = (-1+3i) - (2-i) = -3+4i$$

Si on considère les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$ alors $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OJ}$. Donc, $aff(\overrightarrow{e_1}) = aff(\overrightarrow{OI}) = z_I - z_0 = 1$ et de même $aff(\overrightarrow{e_2}) = i$.

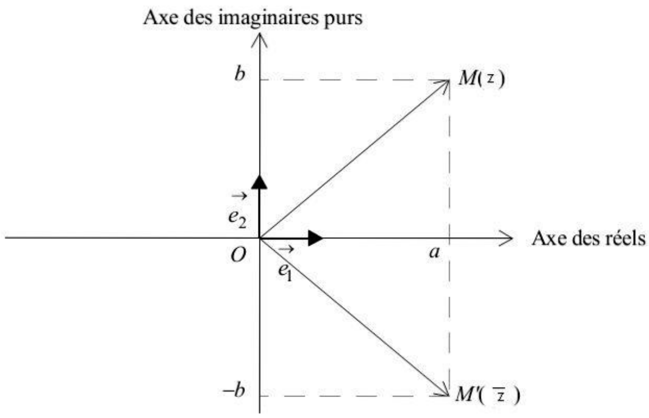
2.3 Conjugué d'un nombre complexe. Inverse d'un nombre complexe non nul

Définition 2.3.1 (Conjugué d'un nombre complexe) *Soient a et b deux nombres réels. Le nombre complexe conjugué de $z = a+bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$.*

Remarque 2.3.2

1. *Il est clair que le conjugué de $\bar{z}$ est z. On dit alors que z et $\bar{z}$ sont deux nombres complexes conjugués.*
2. *$Re(z) = Re(\bar{z})$ et $Im(z) = -Im(\bar{z})$.*

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



Exemple 2.3.3 $\overline{2-3i} = 2+3i$ *et* $\overline{5i+1} = -5i+1$.

Proposition 2.3.4 (Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pu
Soit z un nombre complexe. Alors,

$$z+\bar{z} = 2Re(z) \qquad ; \qquad z-\bar{z} = 2i\,Im(z)$$

En particulier,

$$(z \text{ est réel } \Longleftrightarrow z=\bar{z}) \qquad \text{et} \qquad (z \text{ est imaginaire pur } \Longleftrightarrow z=-\bar{z})$$

Preuve. Notons $z = a+ib$ avec a et b deux réels. Alors, $z+\bar{z} = 2a$ et $z-\bar{z} = 2ib$. En particulier,

$$z=\bar{z} \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z \text{ réel}$$

et

$$z=-\bar{z} \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur}$$

Proposition 2.3.5 (Inverse d'un nombre complexe) *Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ (avec a et b deux réel non touts les deux nuls) admet un inverse pour la multiplication, noté*

$$\frac{1}{z}$$

dont la forme algébrique est

$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Preuve. Cherchons $z' = a'+ib'$ tel que $z\,z' = 1$. On a

$$z\,z' = (aa'-bb') + i(ba'+ab')$$

Donc,

$$z\,z' = 1 \Leftrightarrow aa'-bb' = 1 \text{ et } ba'+ab' = 0 \Leftrightarrow a' = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ et } b' = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

.

Proposition 2.3.6 (Propriétés de la conjugaison) *Pour tout nombres complexes z et z', on a :*
(1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
(2)$\overline{-z} = -\bar{z}$
(3)$\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
(4)$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ $(n \in \mathbb{N})$
(5)$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} (z' \neq 0)$

Preuve. Exercice.

Exemple 2.3.7 *Le conjugué de $z = \frac{2-3i}{1+i}$ est $\bar{z} = \frac{2+3i}{1-i}$.*

Exercice 2.3.8 *Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :*

$$z_1 = \frac{3+2i}{2-3i} \qquad z_2 = \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 \qquad z_3 = \frac{1+2i}{1-i} - \frac{1-2i}{1+i}$$

2.4 Module d'un nombre complexe

Proposition 2.4.1 *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), la quantité $z\,\bar{z}$ est un nombre réel positif :*

$$z\,\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$$

Preuve. Il suffit de calculer $z\,\bar{z}$.

Définition 2.4.2 *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), on appelle module de z la quantité positive*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

.

Exemple 2.4.3 $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ *et* $|\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$.

Proposition 2.4.4 (Propriétés de module) *Soient z et z' deux nombres complexes. On a :*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad , \quad |-z| = |z| \quad , \quad |z| = |\overline{z}| \quad ,$
   $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(Inégalité triangulaire).*
2. $|z\, z'| = |z|\, |z'| \quad , \quad |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$
3. *Pour* $z' \neq 0, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Preuve. (1) $|z| = 0$ est équivaut à $a^2 + b^2 = 0$ (avec a et b des réels tels que $z = a + ib$) ce qui' est équivaut à $a = b = 0$.
On a $|z|^2 = z\,\bar{z} = (-z)\overline{(-z)} = |-z|^2$. Donc, $|z| = |-z|$.
On a $|z|^2 = z\,\bar{z} = \bar{z}\,z = |\bar{z}|^2$. Donc, $|z| = |\bar{z}|$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques de z et z'. Donc, $z + z' = (a + a') + i(b + b')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (a + a')^2 + (b + b')^2 \\
&= (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) + 2aa' + 2bb' \\
&\leq (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} \\
&= \left(\sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(a'^2 + b'^2)}\right)^2 \\
&= (|z| + |z'|)^2
\end{aligned}$$

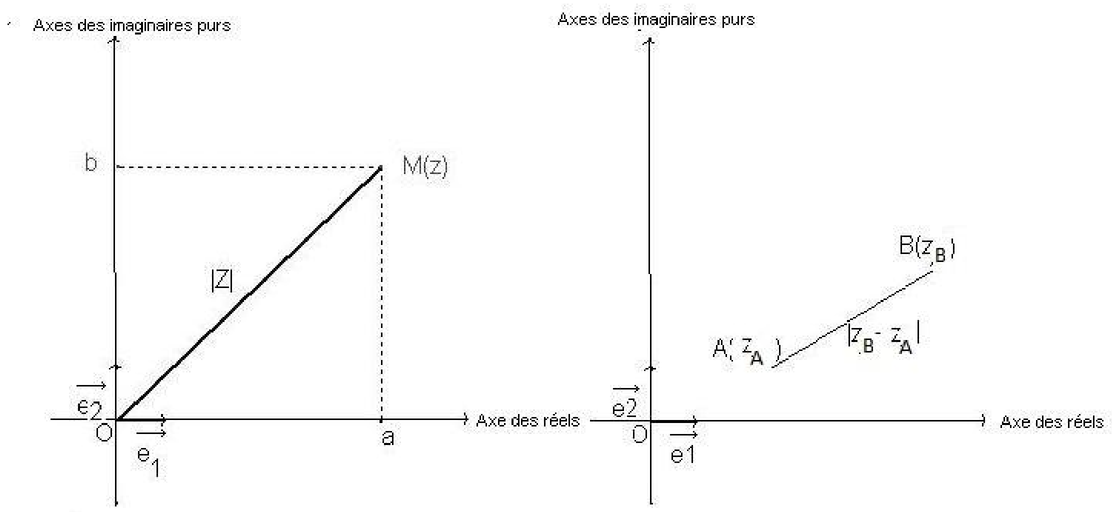
(2) On a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z'} = |z|^2\, |z'|^2 = (|z|\, |z'|)^2$$

Donc, $|z\, z'| = |z|\, |z'|$. La deuxième égalité est déduite de la première par une simple récurrence.
(3) On a $|z| = \left|\frac{z}{z'} z'\right| = \left|\frac{z}{z'}\right|\, |z'|$. Donc, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Proposition 2.4.5 (Interprétation géométrique de la notion de module) *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.*

1. *Si z est l'affixe du point M alors $|z| = OM$.*
2. *Si z_A et z_B sont respectivement les affixes des points A et B alors $AB = |z_B - z_A|$.*



Preuve. On sait d'ejà en géométrie que si $M(a,b)$ alors $OM = \sqrt{a^2+b^2}$. Donc, $OM = |a+ib|$.
Aussi, si $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_B - z_A|.$$

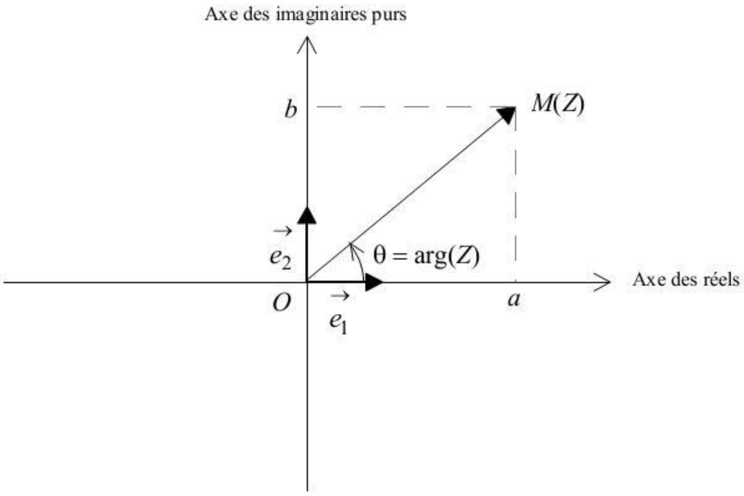
Exercice 2.4.6 *Soit z un nombre complexe différent de 1, M le point d'affixe z et $z' = \frac{z+i}{z-1}$. Déterminer F l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.*

Exercice 2.4.7 (Identité du parallélogramme) *Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.*
(Indication : Utiliser la relation $|z|^2 = z\,\bar{z}$).

Exercice 2.4.8 *Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module. Montrer que le nombre complexe $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.*

2.5 Argument d'un nombre complexe

Définition 2.5.1 (Argument d'un nombre complexe) *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit z un nombre complexe non nul d'image M. On appelle argument de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\theta := \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$. On le note $\theta = \arg(z)$.*



Un nombre complexe possède une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'argument principal.
On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ *ou* $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ***modulo*** 2π *pour signifier que* $\arg(z)$ *peut être égal à* $\pi/4$ *mais aussi égal à n'importe lequel des nombres* $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *où* ($k \in \mathbb{Z}$).
Attention !! Le nombre complexe nul $z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ ne se défini pas.

Exemples 2.5.2 $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; $\arg(1) = 0$ $[2\pi]$; $\arg(-1) = \pi$ $[2\pi]$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

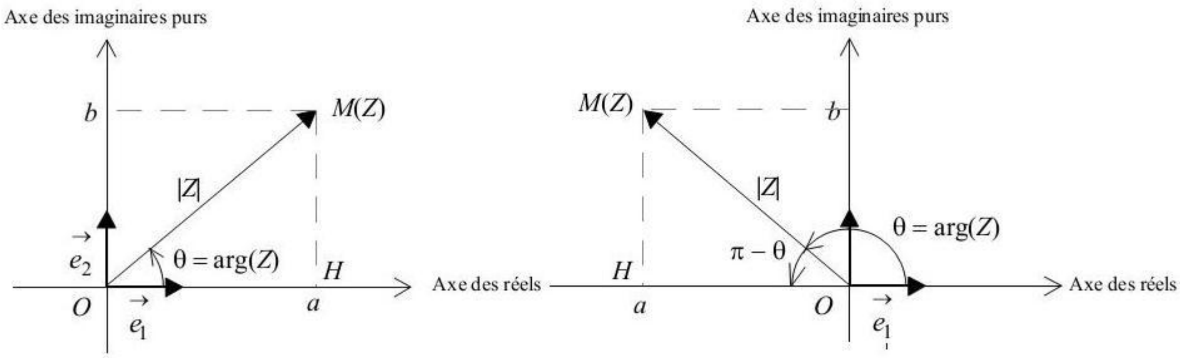
Remarques 2.5.3

1. *un réel strictement positif a un argument égal à* $0\,[2\pi]$ *et un réel strictement négatif a un argument égal à* $\pi\,[2\pi]$.
   On peut dire :
   $$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0\,[\pi]).$$

2. *Un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à* $\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à* $-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
   On peut dire :
   $$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi])$$

Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non

On note $z = a + ib$ avec a et b des réels et on considère les deux cas suivants :



Cas où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \quad \text{et}$$

$$\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Cas où $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$:

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{-a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \quad \text{et}$$

$$\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Dans les cas où θ est négatif, on raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.

Dans tous les cas, nous avons :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|} & . \end{cases}$$

Exemples 2.5.4 *1. Argument principal θ de $z = -2\sqrt{3} + 2i$:*

On a $|z|^2 = 12 + 4 = 16$. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & . \end{cases}$$

En utilisant le cercle trigonométrique, nous concluons : $\theta = \frac{5\pi}{6}$

2. *Argument principal θ de $z = 3 - 4i$:*

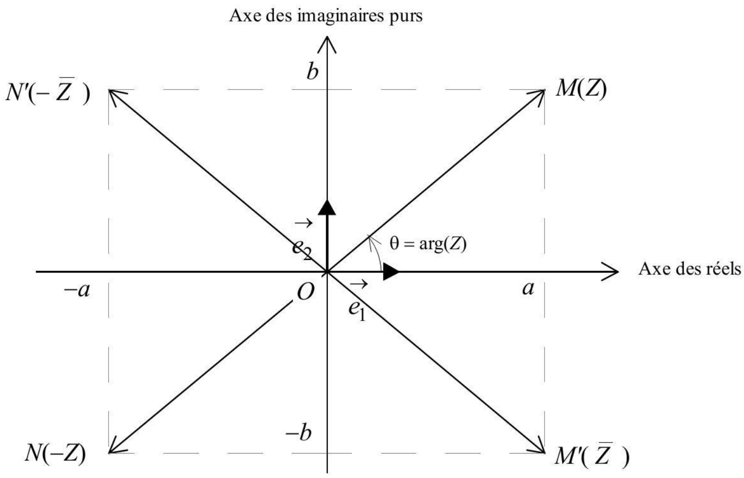
   On a $|z|^2 = 9 + 16 = 25$. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{-4}{5} & . \end{cases}$$

   Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| = 0,9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \approx -0,9273$ rad.

Exercice 2.5.5 *Donner un argument du nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.*

De la figure suivante



on déduit le résultat suivant :

Proposition 2.5.6 *Pour tout nombre complexe non nul z, on a*

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\,[2\pi], \qquad \arg(-z) = \arg(z) + \pi\,[2\pi], \qquad \arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z)\,[2\pi]$$

Remarques 2.5.7 *Soit z un nombre complexe non nul et λ un réel non nul.*

1. *Si $\lambda > 0$,* $\quad \arg(\lambda z) = \arg(z)\,[2\pi]$
2. *Si $\lambda < 0$,* $\quad \arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi\,[2\pi]$

Les propriétés suivantes sur les arguments permettent de multiplier et diviser simplement deux nombres complexes :

Proposition 2.5.8 *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls on a :*

1. $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$
3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
4. $\arg(z^n) = n\arg(z)\,[2\pi]$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve. (1) Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ les fomres algébriques de z et z' respectivement. Donc, la forme algébrique de zz' est

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Soit α un argument de zz' et soient θ et θ' des arguments de z et z' respectivement. Donc,

$$\cos(\alpha) = \frac{aa' - bb'}{|zz'|} = \frac{a}{|z|}\frac{a'}{|z'|} - \frac{b}{|z|}\frac{b'}{|z'|} = \cos(\theta)cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta + \theta')$$

De même on trouve $\sin(\alpha) = \sin(\theta + \theta')$. Donc, $\alpha = \theta + \theta'\,[2\pi]$.
(2) On a $0 = \arg(1) = \arg\left(z.\frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)\ [2\pi]$. Donc, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$.
(3) On a $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
(4) Le résultat est déduit sur $\mathbb{N}$ de (1) par une simple récurrence sur n, et il est prolongé à $\mathbb{Z}$ en utilisant (2).

Remarque 2.5.9
1. *On notera l'analogie entre ces relations et les propriétés de la fonction logarithme.*
2. *Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.*

Exercice 2.5.10 *Soient $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.*

1. *Déterminer les modules de u et v.*
2. *Donner un argument de u et un argument de v.*
3. *Déterminer le modules et un argument des nombres complexes $\bar{u}$, uv, v^3 et $\frac{u}{v}$*
4. *En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$.*
5. *Donner explicitement le nombre complexe v^3.*

2.6 Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul avec a et b deux réels. On peut aussi écrire

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Or $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\theta)$ où θ est un argument de z. Donc,

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Définition 2.6.1 *Soit z un nombre complexe de module r et d'un argument θ. L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle une forme trigonométrique de z.*

Proposition 2.6.2 *Soit z un nombre complexe. Si*
$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\,[2\pi]$.

Preuve On a $|z| = \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2} = r$. En outre, si α est un argument de z alors

$$\cos(\alpha) = \frac{r\cos(\theta)}{r} = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{rsin(\theta)}{r} = sin(\theta)$$

Donc, $\arg(z) = \theta\,[2\pi]$.

Définition 2.6.3 *Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Un nombre complexe de module r et d'argument θ sera écrit alors $re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée une forme exponentielle de z.*

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

Proposition 2.6.4 *Pour tout θ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :*

$$e^{i\theta}\,e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i(\theta)}\right)^n = e^{i(n\theta)} \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{Z}$$

Proposition 2.6.5 (Formule de Moivre) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$(\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

Preuve. Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

D'où la première formule de Moivre.
Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient la seconde formule.

Proposition 2.6.6 (Formule d'Euler) *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve. On a :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

D'où la formule d'Euler.

Exercice 2.6.7 *Soit* $\theta \in]-\pi;\pi[$. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes* $z = e^{i\theta} + e^{i2\theta}$ *et* $z' = 1 + e^{i\theta}$.

Application à la trigonométrie : Les nombres complexes sont très utiles pour de nombreux calculs de trigonométrie. Par exemple, les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

ne sont qu'une autre écriture des parties réelles et imaginaires de $e^{ia}e^{ib}$.

► Linéarisation de $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$:

Linéariser $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$ c'est les exprimer comme combinaisons linéaires de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$. Cette opération est très utile en particulier pour en trouver des primitives.

Exemple 2.6.8 *Linéarisation de* $\sin^6(\theta)$ *: En utilisant les formules d'Euler, on obteint :*

$$\sin^6(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta})$$

On regroupe les termes en $e^{ik\theta}$ *et* $e^{-ik\theta}$ *de manière à faire apparaître* $\cos(k\theta)$ *ou* $\sin(k\theta)$ *:*

$$\begin{aligned}
\sin^6(\theta) &= -\frac{1}{64}\left((e^{6i\theta}+e^{-6i\theta})-6(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta})+15(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})-20\right)\\
&= -\frac{1}{32}\left(cos(6\theta)-6\cos(4\theta)+15\cos(2\theta)-10\right)
\end{aligned}$$

▶ Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

Exemple 2.6.9 *Pour exprimer* $\cos(5\theta)$ *et* $\sin(5\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$*, on commence par écrire la formule de Moivre :*

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^5=\cos(5\theta)+i\sin(5\theta)$$

puis après avoir développé, par la formule de binôme, le premier membre de l'égalité, on identifie les parties réelles et imaginaires de deux membre de l'égalité obtenue ; ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\cos(5\theta) &= \cos^5(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\\
\sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)
\end{aligned}$$

Si on remplace $\sin^2(\theta)$ *par* $1-\cos^2(\theta)$ *dans l'expression précédente de* $\cos(5\theta)$*, on obteint :*

$$\cos(5\theta)=16\cos^5(\theta)-20\cos^3(\theta)+5\cos(\theta)$$

2.7 Résolution dans $\mathbb{C}$ d' équations du second degré à coefficients réels

On se propose de résoudre l'équation (E) $az^2+bz+c=0$ dans $\mathbb{C}$ avec a,b et c sont des réels et $a\neq 0$. On peut mettre l'équation (E) sous la forme $a(z+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}=0$. Considérons le discriminant $\Delta=b^2-4ac$. L'équation sera de la forme $(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$. En distinguant les cas suivant le signe de Δ, on obtient :

Proposition 2.7.1 *Etant donnés trois réels a,b et c avec $a\neq 0$, considérons l'équation :*

$$(E):\ az^2+bz+c=0$$

et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

1. *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle (double) égale à :* $-\frac{b}{2a}$.
2. *Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*
   (a) *réelles si $\Delta > 0$:* $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
   (b) *complexes conjuguées si $\Delta < 0$:* $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 2.7.2 *Résolution de l'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$.*
On a $\Delta = 9 - 12 = -3$. Donc, les solutions sont

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

2.8 Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

Démarche pour résoudre l'équation $z^2 = z_0$ où z_0 est un complexe inconnu :

On pose $z_0 = a + ib = re^{i\theta}$ et $z = x + iy$.
Si un argument θ de z_0 est connu, l'équation est facile à résoudre, ses solutions sont :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad z_2 = -z_1$$

Dans le cas contraire, on procède analytiquement pour obtenir :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r, \\ x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x^2 = \frac{r+a}{2}, \\ y^2 = \frac{r-a}{2}, \\ xy = \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Le fait que $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ assure l'existence des x et y, et on choisit leur signe de telle sorte que leur produit soit du signe de b (afin de satisfaire la condition $2xy = b$).

— Si $b \geq 0$, on prend :

$$z_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad ; \quad z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

— Si $b \leq 0$, on prend :

$$z_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad ; \quad z_2 = -z_1 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

Exemples 2.8.1 *Résolution de l'équation $z^2 = i$.*
On a

$$z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = e^{i\pi/2} \Leftrightarrow z = e^{i\pi/4} \text{ ou } z = -e^{i\pi/4}$$

Résolution de l'équation $z^2 = -7 - 24i$.
On a $|-7-24i| = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$. *Si θ est argument de $-7-24i$ alors*

$$\cos(\theta) = \frac{-7}{25} \qquad \sin(\theta) = \frac{-24}{25}$$

Ces valeurs ne sont pas connues et ne nous donne pas idée sur la valeur exacte de θ. Alors, l'autre choix est de travailler d'une manière analytique.
On pose $z = x + iy$ (la forme algébrique de z). On a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = -7, \\ 2xy = -24. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x^2 = \frac{18}{2} = 9, \\ y^2 = \frac{32}{2} = 16, \\ xy = -12. \end{cases}$$

Donc, $(x,y) = (3,-4)$ ou $(x,y) = (-3,4)$. Ainsi, les solutions de l'équation sont $z_1 = 3-4i$ et $z_2 = -3+4i$.

On se propose maintenant de résoudre l'équation (E) $az^2+bz+c = 0$ dans $\mathbb{C}$ avec a, b et c sont des nombres complexe et $a \neq 0$. On peut mettre l'équation (E) sous la forme $a(z+\frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$.
Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (Attention!! ici Δ est un complexe). On considère δ tel que $\Delta = \delta^2$ (On a déjà vu l'existence). L'équation sera de la forme $(z+\frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$. Enfin, l'équation s'écrit de la forme $\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right) = 0$.

Proposition 2.8.2 *Etant donnés trois complexes a, b et c avec $a \neq 0$, considérons l'équation :*

$$(E): \ az^2 + bz + c = 0$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution (double) égale à : $\quad -\frac{b}{2a}$.*
2. *Si $\Delta \neq 0$, en appelant δ une racine de Δ, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad ; \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Exemple 2.8.3 *Résolution de l'équation $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$.*
On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i \\ &= -2i = 2e^{-i\pi/2} \\ &= \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = (1-i)^2 \end{aligned}$$

Alors, les solutions de notre équation sont :

$$z_1 = \frac{-1+5i+1-i}{2i} = 2 \qquad ; \qquad z_2 = \frac{-1+5i-1+i}{2i} = i+3$$

Remarque 2.8.4 *Contrairement aux équations dont les coefficients sont des réels, ici les complexes z_1 et z_2 ne sont pas nécessairement conjugués.*

Exercice 2.8.5 *Soit l'équation $(E) : z^3 - iz + 1 - i = 0$.*

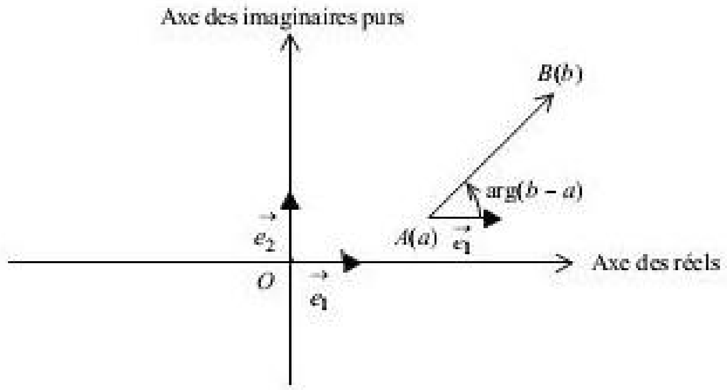
1. *Montrer que (E) admet une racine réelle.*
2. *Donner les solutions de (E).*

2.9 Nombres complexes et Géométrie

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Proposition 2.9.1 (Calcul d'angles) *Si A et B sont deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b alors :*

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)\,[2\pi]$$



Prouve Soit M une point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Donc,
$z_M = z_B - z_A = b - a$, et

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M) = b - a\,[2\pi]$$

Corollaire 2.9.2 *Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b et c alors :*

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\,[2\pi]$$

En particulier :

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel } \Leftrightarrow \text{ les point } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \text{ les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}$$

Preuve. On a

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CB}\right) - \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg(b-c) - \arg(a-c) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\,[2\pi]$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a-c} \text{ est réel } &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = 0; \pi\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{ les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \end{aligned}$$

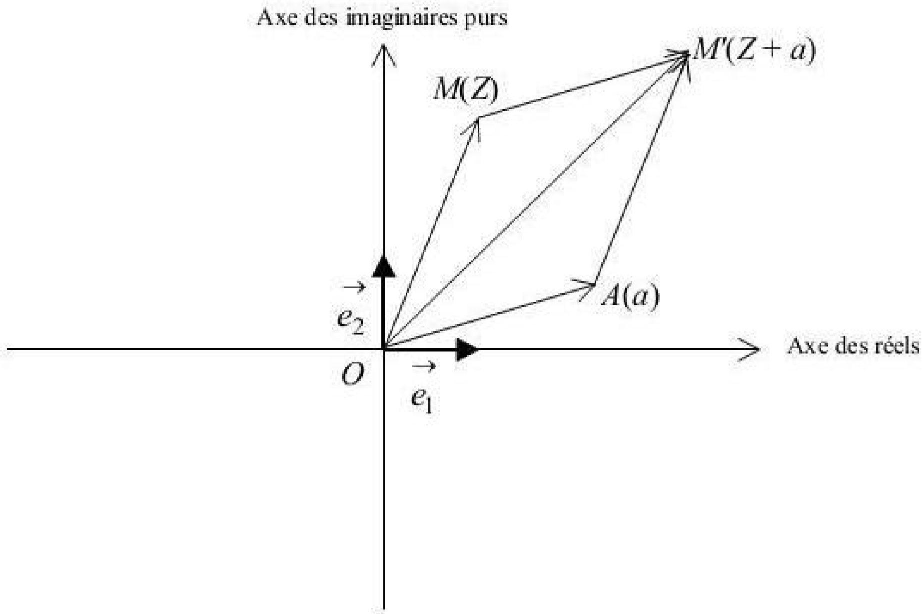
$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur } &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{ les point } A,\ B \text{ et } C \text{ sont perpendiculaires} \end{aligned}$$

2.10 Nombres complexes et quelques transformations du plan

Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Rappelons qu'une translation t de $\mathcal{P}$ de vecteur $\vec{u}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ avec $t(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.
Donc si $M(x, y) \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}(x_0, y_0)$, alors $t_{\vec{u}}(M) = M'(x + x_0, y + y_0)$.

Proposition 2.10.1 (écriture complexe d'une translation) *La translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe a, transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' = z + a$$



Preuve. Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par $z' - z = a$.

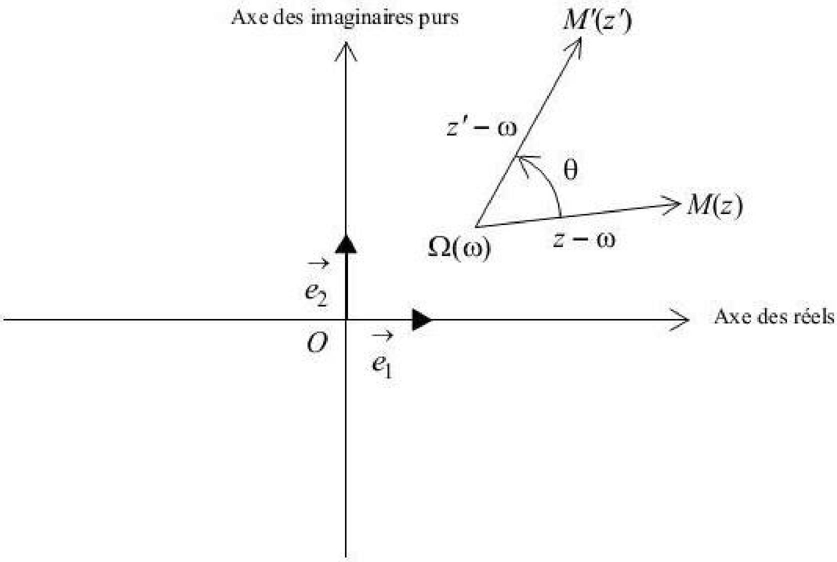
Soient θ un réel et Ω un point du plan. Rappelons que la rotation r de centre Ω et d'angle θ est la transformation r de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui laisse Ω invariant, et si M est un point du plan distinct de Ω alors

$$r(M) = M' \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \text{ et } \Omega M = \Omega M'.$$

On la note aussi $r_{\Omega,\theta}$.

Proposition 2.10.2 (écriture complexe d'une rotation) *La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$



Preuve. Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est vérifiée. Supposons désormais $M \neq \Omega$. Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ signifie que :

$$\begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1, \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\,[2\pi], \end{cases}$$

Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par :

$$\begin{cases} \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1, \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\,[2\pi], \end{cases}$$

On en déduit alors que $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$. D'où le résultat.

Cas particuliers :

— Si $\omega = 0$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = e^{i\theta} z$$

— Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (quart de tour de sens direct), alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' - \omega = i(z - \omega)$$

— Si $\omega = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = iz$$

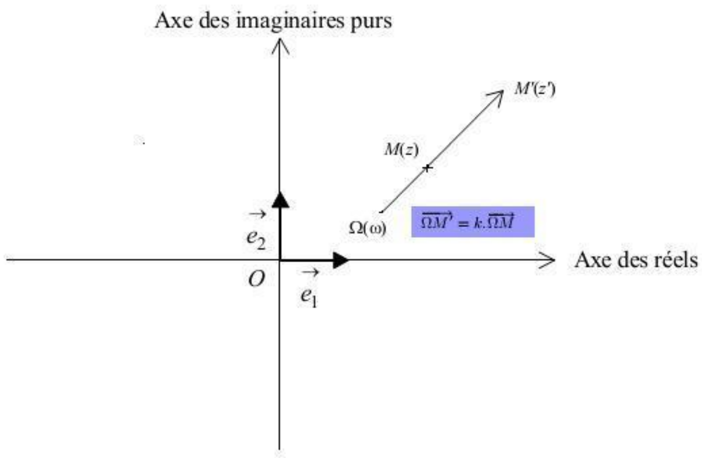
Soit Ω un point du plan et soit k un réel non nul. Rappelons qu'une homothétie h de centre Ω et de rapport k est une transformation h de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ tel que

$$h(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

On la note aussi $h_{\Omega,k}$.

Proposition 2.10.3 (écriture complexe d'une homothétie) *L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$



Preuve. Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ signifie que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par $z' - \omega = k(z - \omega)$. D'où le résultat.

Exercice 2.10.4 *On considère dans l'ensemble des nombres complexes,l'équation (E) : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.*

1. (a) *Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.*
   (b) *En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.*
2. *Le plan est rapporté un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.*
   Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. *Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*
   (a) *Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.*
   (b) *Vérifier que $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A} = i$. En déduire la nature du triangle AEF.*

Soit Ω un point du plan. Rappelons que la symétrie s de centre Ω est la transformation s de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui laisse invariant Ω, et si M est un point du plan distinct de Ω alors $s(M) = M'$ tel que Ω est le milieu du segment $[MM']$, c'est à dire $\overrightarrow{\Omega M} = -\overrightarrow{\Omega M'}$.

Proposition 2.10.5 *(Expression complexe d'une symétrie centrale). La symétrie de centre (Ω_ω) transforme le point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' = 2\omega - z.$$

Soit Δ une droite du plan. Rappelons que la symétrie axiale s_Δ d'axe Δ (ou réflexion) est la transformation s_Δ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui laisse la droite Δ invariante, et si M est un point du plan extérieur à Δ alors $s_\Delta(M) = M'$ tel que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

Proposition 2.10.6 *(Expression complexe d'une symétrie axiale d'axe Δ passant par l'origine). Soit $A(z_0)$ un point du plan, tel que*
$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Alors si Δ est la droite passant par O et A et $M(z)$ est un point du plan. $M' = s_\Delta(M)$ a pour affixe $z' = e^{2i\theta_0}\bar{z}$.

Démonstration. (Vérification.) Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan avec $z = re^{i\theta}$ et $z' = e^{2i\theta_0}\bar{z}$. Alors $z' - z = re^{2i\theta_0-\theta} - re^{i\theta}$. Donc

$$z' - z = re^{i\theta_0}(e^{i(\theta_0-\theta)} - e^{-i(\theta_0-\theta)}) = 2irsin(\theta_0-\theta)e^{i\theta_0}.$$

Or, pour tout réel α, si $\vec{u}(e^{i\alpha})$ et $\vec{v}(ie^{i\alpha})$, on a $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$. Donc $\overrightarrow{MM'} \perp (\Delta)$ D'autre part,

$$\frac{z+z'}{2} = \frac{r}{2}(e^{i(2\theta_0-\theta)} + e^{i\theta}) = \frac{r}{2}e^{i\theta_0}(e^{i(\theta_0-\theta)} + e^{-i(\theta_0-\theta)}) = rcos(\theta_0-\theta)e^{i\theta_0}.$$

Donc, le milieu B du segment $[MM']$ est dans la droite (Δ). Ainsi, la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ et M' est l'image de M par s_Δ.

10.2. **Similitudes.**

Définition 2.10.7 *Soit S de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ une transformation du plan, qui à chaque point M du plan associe un point M' et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que S est une similitude de rapport k si*

$$\|\overrightarrow{M'N'}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|, \quad \forall M,\ N \in \mathcal{P}.$$

Exemple 2.10.8 *1) Soit $h_{A,k}$ une homothétie du plan de centre le point A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$. Alors $h_{A,k}$ est une similitude de rapport $|k|$.*
2) Soit S la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, alors S est une similitude de rapport $|a|$.
3) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = a\bar{z} + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, alors S est une similitude de rapport $|a|$.
Faisons la vérification pour l'exemple 2), l'exemple 3) se fait de la même manière, et les homothéties ont la forme 2) :
Soient $M(z)$ et $N(\omega)$ deux points du plan. Soient M' et N' leurs images par S. Alors $az + b$ et $a\omega + b$ sont leurs affixes respectives.

$$\|\overrightarrow{MN}\| = |\omega - z|, \quad et\ k\|\overrightarrow{M'N'}\| = |a(w-z)| = |a|\|\overrightarrow{MN}\|.$$

Exercice 2.10.9 *Soit S une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A un point quelconque du plan. Montrer que $h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$ est une similitude de rapport 1 (c'est à dire, une isométrie). Déduire, qu'il existe une isométrie T tel que $S = h_{A,\frac{1}{k}} \circ T$.*

Proposition 2.10.10 *Soit S une similitude du plan. Alors S préserve la mesure des angles en valeur absolue.*

Preuve. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, notons $S(M) = M'$ et soit k le rapport de S. Soient $M, N, P \in \mathcal{P}$. Alors

$$\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'} \rangle = \|\overrightarrow{M'N'}\| \|\overrightarrow{M'P'}\| cos(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'})$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'} \rangle &= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{M'P'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'P'}\|^2) \\
&= -\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{P'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'P'}\|^2) \\
&= -\frac{1}{2}k^2(\|\overrightarrow{PN}\|^2 - \|\overrightarrow{MN}\|^2 - \|\overrightarrow{MP}\|^2) \\
&= k^2 \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \rangle \\
&= k^2 \|\overrightarrow{MN}\| \|\overrightarrow{MP}\| cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).
\end{aligned}$$

D'où, on déduit que

$$cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = cos(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}).$$

Avec un simple schéma, on peut voir que toute similitude conserve l'orientation des angles, ou inverse l'orientation des angles. Donc on peut énoncer la définition suivante.

Définition 2.10.11 *Soit S une similitude du plan.*
1) Si S préserve les orientations, on dit que S est une similitude directe. 2) Si S inverse les orientations, on dit que S est une similitude indi- recte.

Exemple 2.10.12 *Soient a; b deux nombres complexes, avec $a \neq 0$. Alors :*
1) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$, alors S est une similitude directe de rapport $|a|$. En effet, considérons le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soient A, $M \in \mathcal{P}$ tel que A a pour affixe 1 et M a pour affixe z, où $|z| = 1$. Alors b est l'affixe de $O' = S(O)$, $a + b$ est l'affixe de $S(A) = A'$ et $az + b$ est l'affixe de $S(M) = M'$.
Posons $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. M est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle θ, donc $z = e^{i\theta}$. D'autre part, a et $az = ae^{i\theta}$ sont les affixes respectives de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'M'}$. Donc $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta$. D'où, S préserve l'orientation des angles.
2) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affxe z associe le point M' d'affixe $z' = a\bar{z} + b$, alors S est une similitude indirecte de rapport $|a|$ (la preuve est analogue à celle du premier exemple).

Théorème 2.10.13 *Soit S une similitude du plan.*
1) Si S est directe, alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$, tel que $a \neq 0$ et S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affxe $z' = az + b$.
2) Si S est indirecte, alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$, tel que $a \neq 0$ et S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affxe $z' = a\bar{z} + b$.

Preuve. Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soient $A, M \in \mathcal{P}$ tel que A pour affixe 1 et M a pour affixe z. Soit b l'affixe de $O' = S(O)$, α l'affixe de $S(A) = A'$ et z' l'affixe de $S(M) = M'$.
Cas 1. S préserve l'orientation des angles. Soit

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta.$$

Soit N le point du plan d'affxe $\frac{z}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, alors N est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle θ, donc

$$z = e^{i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|.$$

De même, comme

$$(\frac{\overrightarrow{O'A'}}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}, \frac{\overrightarrow{O'M'}}{\|\overrightarrow{O'M'}\|}) = \theta, \text{ alors}$$

$$\frac{z' - b}{\|\overrightarrow{O'M'}\|} = e^{i\theta}\frac{\alpha - b}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}.$$

Or, si k est le rapport de la similitude S, alors

$$\|\overrightarrow{O'M'}\| = k\|\overrightarrow{OM}\| \text{ et } \|\overrightarrow{O'A'}\| = k\|\overrightarrow{OA}\|.$$

D'où,

$$z' - b = \overrightarrow{OM}e^{i\theta}(\alpha - b).$$

Donc on déduit que $z' = (\alpha - b)z + b$.
Cas 2. S inverse l'orientation des angles. Soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, alors $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = -\theta$. On a toujours

$$z = e^{i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|, \text{ donc } \bar{z} = e^{-i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|.$$

Et on a

$$\frac{z' - b}{\|\overrightarrow{O'M'}\|} = e^{-i\theta}\frac{\alpha - b}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}.$$

On procède comme dans le premier cas, on déduit que $z' = (\alpha - b)\bar{z} + b$.

Exemple 2.10.14 *1) Les rotations sont des similitudes directes.*
2) Les symétries axiales sont des similitudes indirectes.
3) Les translations sont des similitudes directes.

Exercice 2.10.15 *Si S est une similitude du plan, et A, B et C sont 3 points alignés de $\mathcal{P}$, alors leurs images respectives par S, A', B' et C' sont alignés.*

Exercice 2.10.16 *Soit S une similitude directe non triviale (c'est à dire : différente de l'identité). Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$ et si $M \in \mathcal{P}$ a pour affixe $z, S(M) = M'$ a pour affixe $az + b$.*
1) Montrer que S admet un point invariant si, et seulement si $a \neq 1$, et dans ce cas, le point invariant est unique.
2)Vérifier que si S n'admet pas de point invariant, S est une translation.

Exercice 2.10.17 *Soit S une similitude directe, d'expression complexe $z \longmapsto az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Soient $A, B, M \in \mathcal{P}$. Soient A', B' et M' leurs images respectives par S. Montrer que*

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = arg(a)[2\pi].$$

Remarque 2.10.18 *Soit S une similitude directe. Si S admet un point invariant, il est appelé centre de S. L'argument de a est appelé angle de S.*

2.11 Solutions des exercices

Exercice 2.3.8.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)\overline{(2-3i)}}{(2-3i)\overline{(2-3i)}} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{6+9i+4i+9}{2^2+3^2} = \frac{15+13i}{13} = \frac{15}{13} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\frac{-1+3i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1-6i-9}{4} = \frac{-8-6i}{4} = -2 - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

On peut bien aussi calculer les carrés des composantes de la fractions z_2 (numérateur et dénominateur), et ensuite chercher la forme algébrique de z_2 :

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 = \frac{(1+2i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+4i-4}{1-2i-1} \\ &= \frac{-3+4i}{-2i} = \frac{(-3+4i)i}{(-2i)i} = \frac{-4-3i}{2} = -2-\frac{3}{2}i \end{aligned}$$

Pour simplifier z_3 on peut mettre les deux fractions de cette différence sur un même dénominateur :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1+2i}{1-i} - \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1+i)-(1-2i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+i+2i-2-1+i+2i+2}{1+1} = \frac{6i}{2} = 3i \end{aligned}$$

Si on remarque que $\frac{1+2i}{1-i} = \overline{\frac{1-2i}{1+i}}$, on peut déduire que :

$$z_3 = 2iIm\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)$$

Or ;

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2}$$

Donc,

$$z_3 = 2i\left(\frac{3}{2}\right) = 3i$$

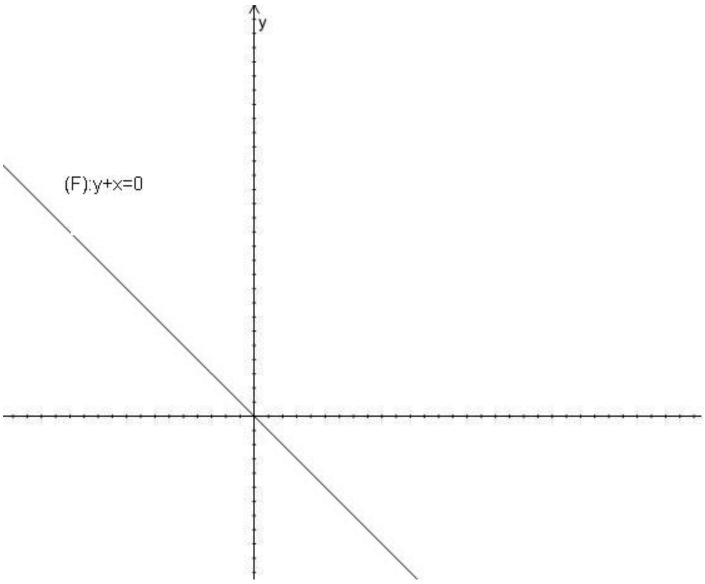
Exercice 2.4.6.

Cherchons F l'ensemble des points $M(z = x+iy)$ tels que $\left|\frac{z+i}{z-1}\right| = 1$.

<u>Mt́hode1 :</u>

$$\begin{aligned} \left|\frac{z+i}{z-1}\right| = 1 &\Leftrightarrow |z+i|^2 = |z-1|^2 \\ &\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i) = (z-1)(\bar{z}-1) \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \\ &\Leftrightarrow -i(z-\bar{z}) = -(z+\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow -i2Im(z) = -2Re(z) \\ &\Leftrightarrow Im(z) = -Re(z) \\ &\Leftrightarrow x+y = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, F est la droite d'équation $x + y = 0$.



Méthode2 : On considère les points $A(-i)$ et $B(1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+i}{z-1}\right| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |z+i| = |z-1| \\ &\Leftrightarrow \quad AM = BM \\ &\Leftrightarrow \quad F \text{ est la droite médiatrice du segment } [AB]\end{aligned}$$

Exercice 2.4.7.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} + (z-z')\overline{(z-z')} \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' + z\bar{z} - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= 2(z\bar{z} + z'\bar{z}') \\ &= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)\end{aligned}$$

Exercice 2.4.8.

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module. Montrons que le nombre complexe $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

Puisuqe u et v sont distincts et de même module, ils sont tout les deux non nuls. On a alors,

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} &= \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}} = \frac{u\bar{u}+u\bar{v}}{u\bar{u}-u\bar{v}} = \frac{|u|^2+u\bar{v}}{|u|^2-u\bar{v}} = \frac{|v|^2+u\bar{v}}{|v|^2-u\bar{v}} = \frac{v\bar{v}+u\bar{v}}{v\bar{v}-u\bar{v}} \\ &= \frac{v+u}{v-u} = -\frac{u+v}{u-v}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 3.5.10.

Pour chercher un argument de z, il faut d'abord le mettre sous forme algébrique :

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4} = i$$

Donc, $\arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Exercice 2.5.10.

Soit θ un argument de $u = 1+i$ et θ' un argument de $v = -1+i\sqrt{3}$.

1. $|u|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $|v| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.
2. Argument de u : On a

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   Donc, $\theta = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
   Argument de v : On a

$$\cos(\theta') = \frac{-1}{2} \qquad ; \qquad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Donc, $\theta' = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

3. On a $|\bar{u}| = |u| = \sqrt{2}$; $|uv| = |u|\,|v| = 2\sqrt{2}$; $|v^3| = |v|^3 = 8$ et $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Pour les arguments on a :
   $\arg(\bar{u}) = -\arg(u) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$
   $\arg(uv) = \arg(u) + \arg(v) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}\,[2\pi]$
   $\arg(v^3) = 3\arg(v) = 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi = 0\,[2\pi]$
   $\arg\left(\frac{u}{v}\right) = \arg(u) - \arg(v) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}\,[2\pi]$

4. On a

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3}}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1+3} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{aligned}$$

Donc,

$$\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

5. On a $|v^3| = 8$ et $\arg(v^3) = 0\,[2\pi]$.
   Donc, $v^3 = 8(\cos(0) + i\sin(0)) = 8$.

Exercice 2.6.7.
Dans ce genre d'exercices, on factorise souvent par la moyenne des deux arguments :

$$\begin{aligned}z &= e^{i\theta} + e^{i2\theta} = e^{3i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)\,e^{3i\theta/2} \\ &= 2\cos(\theta/2)\left(\cos(3\theta/2) + i\sin(\cos(3\theta/2)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z' &= 1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) \\ &= 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} = 2\cos(\theta/2)\left(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\right)\end{aligned}$$

Comme $\theta \in]-\pi;\pi[$, $\theta/2 \in]-\pi/2;\pi/2[$, et par conséquent $\cos(\theta/2) > 0$. Donc, $2\cos(\theta/2)$ est bien le module de z et z'.

Exercice 2.8.5.

1. Soit x une racine réelle de (E). Alors, $x^3 - ix + 1 - i = 0$. Ainsi, $(x^3+1) - i(x+1) = 0$. Par suite, $x^3 + 1 = 0$ et $x + 1 = 0$. Par conséquent, $x = -1$.
2. On divise $z^3 - iz + 1 - i$ par $z + 1$ pour obtenir

$$z^3 - iz + 1 - i = (z+1)(z^2 - z + 1 - i).$$

Cherchons les solutions de l'équation (E') : $z^2 - z + 1 - i = 0$.
On a $\Delta = 1 - 4(1-i) = 1 + 4i - 4 = 1 + 2(2i) + (2i)^2 = (1+2i)^2$. Donc, les solutions de (E') sont :

$$z_1 = \frac{1-1-2i}{2} = -i \qquad , \qquad z_2 = \frac{1+1+2i}{2} = 1+i$$

Enfin, les solutions de (E) sont -1, z_1 et z_2.

Exercice 2.10.4.

1. (a) On a $2^3 + 2.2^2 - 16 = 0$. Donc, 2 est une solution de (E).

$$z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b - 2a = 2, \\ c - 2b = 0, \\ -2c = -16. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 4, \\ c = 8. \end{cases}$$

D'où $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + 8z + 4)$.

(b) $\Delta = 16 - 4.8 = -16 = (4i)^2$. Donc, les racince de $z^2 + 8z + 4$ sont

$$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}$$

Les solutions de (E) sont 2, z_1 et z_2.

2.

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \\ &\Leftrightarrow z_C = z_B + z_D - z_A = 2 + 4i \end{aligned}$$

3. $r = r_{(B;-\frac{\pi}{2})}$ et $r' = r_{(D;\frac{\pi}{2})}$

(a)

$$\begin{aligned} E = r(C) &\Leftrightarrow z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B) \\ &\Leftrightarrow z_E - z_B = -i(z_C - z_B) \\ &\Leftrightarrow z_E = -i(z_C - z_B) + z_B = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = r'(C) &\Leftrightarrow z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D) \\ &\Leftrightarrow z_F - z_D = i(z_C - z_D) \\ &\Leftrightarrow z_F = i(z_C - z_D) + z_D = -4 + 6i \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4 + 6i + 2 + 2i}{6 + 2 + 2i} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} = \frac{i(2i + 8)}{8 + 2i} = i$$

On a alors,

$$\left|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = |i| = 1 \Leftrightarrow AF = AE \Leftrightarrow AFE \text{ est isocèle en } A$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] &\Leftrightarrow (AF) \perp (AE) \\ &\Leftrightarrow AFE \text{ est rectangle en } A \end{aligned}$$

Exercice 2.10.9.

Soient $M, N \in \mathcal{P}$. Posons

$S(M) = M', S(N) = N'$ et $h_{A,\frac{1}{k}}(M') = M''$, $h_{A,\frac{1}{k}}(N') = N''$. Alors

$$\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{M''A} + \overrightarrow{AN''} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AN'}) = \frac{1}{k}\overrightarrow{M'N'}$$

D'où,

$$\|\overrightarrow{M''N''}\| = \frac{1}{k}\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}.\|$$

Ainsi, $h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$ est une isométrie. Posons $T = h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$.

Alors $S = h_{A,k} \circ T$.

Exercice 2.10.15.
Clairement, on peut supposer que les points A, B et C sont distincts deux à deux. Désignons par z_1, z_2 et z_3 leurs affixes respectives et par z'_1, z'_2 et z'_3 les affixes respectives de leurs images respectives A', B' et C'. La famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 - z_1 = \lambda(z_3 - z_1)$.
Supposons d'abord que S est directe. Donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$, où $a \neq 0$ tel que si $M(z)$ est un point du plan, $M' = S(M)$ a pour affixe $az + b$. Considérons les affixes respectifs $a(z_2 - z_1)$ et $a(z_3 - z_1)$ des vecteurs $\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}$. Alors $a(z_2 - z_1) = \lambda a(z_3 - z_1)$. Ainsi la famille $\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}$ est liée.
Le cas des similitudes indirectes est traité de manière analogue.

Exercice 2.10.16.
Si $a \neq 1$, l'équation $z = az + b$ admet une unique solution. Donc si $a \neq 1$, S admet un unique point invariant.
Si $a = 1$, comme S n'est pas l'identité, $b \neq 0$. D'où S est une translation, et n'a pas de point invariant.

Exercice 2.10.17.
Désignons par z_1, z_2 et z les affixes respectives de A, B et M. Alors $z - z_1$ et $z_2 - z_1$ sont les affixes respectives de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$. Et par suite

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = arg(a)[2\pi].$$

De même pour $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Chapitre 3

Polynômes et Fractions Rationnelles.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{C}$ soit $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés les scalaires.

3.1 Définitions et opérations

Définition 3.1.1 *i) On appelle polynôme P à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang (c-à-d il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq n,\ a_k = 0$). On écrit P sous la forme*

$$P := P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n = \Sigma_{k=0}^{n} a_kX^k$$

Les scalaires $a_0, ..., a_n$ sont appelés les coefficients de P et X est l'indéterminée.
On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
ii) Le polynôme nul 0 est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
iii) On dit que deux polynômes sont égaux si et seulement si les suites consituées de leurs coefficients sont égales.

Définition 3.1.2 *(Fonctions polynomiales). Si $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_kX^k \in K[X]$, on appelle fonction polynomiale associée, l'application :*

$$P\tilde{} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$
$$X \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

Remarque 3.1.3 *S'il n'y a pas d'ambiguïté, on identifie le polynôme avec la fonction polynomiale associée.*

Définition 3.1.4 *(Somme de deux polynômes). La somme des polynômes* $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q = \Sigma_{k=0}^{m} b_k X^k$ *est le polynôme :*

$$P + Q = \Sigma_{k=0}^{n+m} (a_k + b_k) X^k$$

N. B : Les coefficients qui ne s'affichent pas dans l'écriture de P *et* Q *jusqu'à l'ordre* $n+m$ *seront remplacés par des zéros.*

Remarquons que l'addition (la loi $+$) est une loi de composition interne sur$K[X]$.

Proposition 3.1.5 *(Propriétés de* $+$*). La loi* $(+)$ *sur* $K[X]$ *vérifie les propriétés suivantes :*
Associativité : $\forall P, Q, R \in K[X],\ P + (Q + R) = (P + Q) + R.$
Existence d'un élément neutre : *Le polynôme nul est l'élément neutre pour la loi* $(+)$*, c'est à dire,* $P + 0 = 0 + P = P$ *pour tout* $P \in K[X]$.
Existence d'un symétrique : $-P$ *est l'élément symétrique de* P*, c'est à dire,* $P + (-P) = P - P = 0$ *pour tout* $P \in K[X]$.
Commutativité : $\forall P, Q \in K[X],\ P + Q = Q + P.$
Autrement dit, $(K[X], +)$ *est un groupe commutatif*

Démonstration. C'est une conséquence des résultats analogues sur les suites.

Définition 3.1.6 *(Multiplication par un scalaire). Soient* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$*. La multiplication de* P *par* λ *est l'élément de* $K[X]$ *défini par :*

$$\lambda.P = \Sigma_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k.$$

Proposition 3.1.7 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et* $P, Q \in K[X]$*, on a :*
(1) $(\lambda + \mu).P = \lambda.P + \mu.P.$
(2) $\lambda.(P + Q) = \lambda.P + \lambda.Q.$
(3) $(\lambda\mu).P = \lambda(\mu.P).$
(4) $1.P = P.$
(5) $0.P = 0.$

Remarques 3.1.8 (1) *La multiplication des polynômes par les scalaires est une loi de composition externe.*
(2) $(K[X], +, .)$ *est un* K*-espace vectoriel.*

La multiplication entre polynômes est définie par analogie avec la multiplication entre fonctions polynomiales.

Définition 3.1.9 *(Multiplication de deux polynômes). Le produit des polynômes* $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q = \Sigma_{k=0}^{m} b_k X^k$ *est le polynôme :*

$$P \times Q = \Sigma_{k=0}^{n+m} c_k X^k, \quad \text{où } \forall k \ c_k = \Sigma_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \Sigma_{i+j=k} a_i b_j$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, le produit des polynômes P et Q est aussi noté PQ.

Proposition 3.1.10 *(Propriétés de* $(\times)$*). La loi* $(\times)$ *sur* $K[X]$ *vérifie les propriétés suivantes :*
Associativité : $\forall P, Q, R \in K[X], \ P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R.$
Existence d'un élément neutre : *Le polynôme* $P = 1$ *est l'élément neutre pour la loi* $(\times)$*, c'est à dire* $P \times 1 = 1 \times P = P$ *pour tout* $P \in K[X]$.
Commutativité : $\forall P, Q \in K[X], PQ = QP.$
Distributivité sur + : $\forall P, Q, R \in K[X], P(Q + R) = PQ + PR.$

Démonstration. Exercice.

3.2 Degré d'un polynôme

Définition 3.2.1 *Soit* $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. *On définit le degré de* P*, noté* $degP$*, par :*
- Si $P = 0$*, on pose* $degP = -\infty$.
- Si $P \neq 0$*, alors* $degP = max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$.

Remarques 3.2.2 *Soit* $P \in K[X]$.
(1) Si $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k$ *, on ne peut affirmer que le fait que* $degP \leq n$*. Il faut préciser* $a_n \neq 0$ *pour avoir* $degP = n$.

(2) Les polynômes de la forme $a_k X^k$ s'appellent "monômes".
(3) Si $P \in K[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}$ (c-à-d,$a_n \neq 0$), on dit que a_n est le coefficient dominant (ou coefficient de plus haut degré) de P et que $a_n X^n$ est le terme dominant.
(4) Lorsque le coefficient dominant de P est 1, on dit que P est unitaire.

Proposition 3.2.3 *Soient $P, Q \in K[X]$ non nuls et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors,*
(1) *$deg(P+Q) \leq max(degP, degQ)$. L'inégalité est stricte si et seulement si $degP = degQ$ et si les coefficients dominants de P et Q sont opposés.*
(2) *$deg(\lambda P) = degP$.*
(3) *$deg(PQ) = degP + degQ$. De plus le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficents dominants de P et Q.*

Démonstration. On pose $P = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \Sigma_{k=0}^{m} b_k X^k$ avec $degP = n$ et $degQ = m$ (donc $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$).
(1) Si $n = m$, il est clair que $P + Q = \Sigma_{k=0}^{n}(a_k + b_k)X^k$. Donc, $deg(P + Q) \leq n$ avec égalité si $a_n + b_n \neq 0$.
Si $n > m$, on a :

$$P + Q = a_n X^n + ... + a_{m+1} X^{m+1} + \Sigma_{k=0}^{m}(a_k + b_k)X^k$$

Ainsi, $deg(P + Q) = n = max\{n, m\}$. De même, si $m > n$,
$deg(P + Q) = m = max\{n, m\}$.
(2) Le coefficient dominant de λP est $\lambda a_n \neq 0$. Alors, $deg(\lambda P) = n$.
(3) On a :

$$PQ = \Sigma_{k=0}^{n+m} c_k X^k, \text{ où } \forall k \ c_k = \Sigma_{i=0}^{k} a_i b_{ki} = \Sigma_{i+j=k} a_i b_j$$

Alors, $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$ est le coefficient dominant de PQ. Ainsi, $deg(PQ) = degP+degQ$.

Corollaire 3.2.4 *Soient $P, Q \in K[X]$. Alors,*
(1) *Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.*
(2) *Si $PQ = 1$ alors $P, Q \in \mathbb{K}$*

Démonstration. (1) On raisonne par contraposée. Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Alors $deg(PQ) = degP + degQ \in \mathbb{N}$. Donc, $PQ \neq 0$. Absurde.
(2) On a $degP + degQ = deg(PQ) = 0$. Donc, $degP = degQ = 0$.

3.3 Division euclidienne

Définition 3.3.1 *Soient $P, Q \in K[X]$ non nuls. On dit que Q divise P (ou que P est un multiple de Q) s'il existe $T \in K[X]$ tel que $P = QT$. On note alors $Q|P$.*

Exemples 3.3.2 (1) *Le polynôme $(X-1)(X-2)$ divise le plynôme* $(X-1)^2(X-2)(X^2+X+1)$.
(2) *Le polynôme* 0 *est divisible par tous les polynômes mais il ne divise que lui même.*
(3) *Si $Q|P$ avec P non nul, alors $degP \geq degQ$, car on a $P = TQ$ avec $T \neq 0$, et donc $degP = degT + degQ \geq degQ$.*
(4) *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ divise tout polynôme non nul de $K[X]$.*

Proposition 3.3.3 *La relation de divisibilité vérifie :*
(1)$\forall P \in K[X]$ *non nul,* $P|P$.
(2)$\forall P, Q \in K[X]$ *non nuls,* $P|Q$ *et* $Q|P \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, P = \lambda Q$, *(on dit qu'ils sont des polynômes associés).*
(3)$\forall P, Q, R \in K[X]$ *non nuls,* $P|Q$ *et* $Q|R \Rightarrow P|R$.

Démonstration. Exercice.

Théorème 3.3.4 (*Division euclidienne*) . *Soient $A, B \in K[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes dans $K[X]$, tel que*

$$A = BQ + R \quad et\ degR < degB$$

Q est le quotient et R est le reste de la division euclidienne de A par B.

Démonstration. Existence : Si $degA < degB, Q = 0$ et $R = A$ conviennent.
On pose $degA = n$ et $degB = m$. Montrons l'existence de cette division par récurrence pour tout $n \geq m$. On pose d'abord $A = \Sigma_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \Sigma_{k=0}^{m} b_k X^k$
Si $n = m, Q = \frac{a_m}{b_m}$ et $R = A - \frac{a_m}{b_m} B$ convient car $deg(R) < degB$.
Supposons la propriété (existence) vraie pour tout polynôme A de degré $\leq n$ et montrons la pour un polynôme A de degré $n+1$.
Le polynôme $A_1 = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n+1-m} B$ est de degré $\leq n$.
Donc, il existe un couple (Q_1, R_1) de polynômes de $K[X]$ tel que $A_1 = Q_1 B + R_1$ et

$degR_1 < degB$.
Alors,

$$A = A_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n+1-m}B = Q_1B + R_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n+1-m} = (Q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n+1-m})B + R_1$$

On pose $Q = Q_1 + \frac{a_n}{b_m}X^{n+1-m}$ et $R = R_1$. On a bien le résultat.

Unicitée : Supposons l'existence de deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) qui satisfont à la conclusion de ce théorème avec $Q_1 \neq Q_2$.
Donc, $deg(R_1 - R_2) \leq max\{degR_1, degR_2\} < derB$.
En outre, $deg(R_1 - R_2) = deg(B(Q_1 - Q_2)) = degB + deg(Q_1 - Q_2) \geq degB$.
Ce qui est absurde.

Exemple 3.3.5 *On a* $X^5 + 2X^3 - 2X - 2 = (X^3 + X)(X^2 + 1) - 3X - 2$

Remarque 3.3.6 $B|A$ *si et seulement si le reste de la division euclidienne de* A *par* B *est nul.*

Proposition 3.3.7 *Soient* $P \in K[X]$ *et* $a \in \mathbb{K}$. *Alors le reste de la division euclidienne de* P *par* $X - a$ *est* $P(a)$.

Démonstration. Soit $P = Q(X - a) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ la division euclidienne de P par $X - a$.
Alors, $P(a) = \lambda$

Exercice 3.3.8 *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$, *tel que* $P(0) = P(2) = 1$ *et* $P(1) = 2$. *Déterminer le reste de la division euclidienne de* P *par* $X(X - 1)(X - 2)$.

Le résultat suivant est la base de l'algorithme d'Euclide, qui permet de déterminer le plus grand diviseur commun de deux polynômes :

Proposition 3.3.9 (*Algorithme d'Euclide*). *Soient* A *et* B *deux polynômes de* $K[X]$ *avec* $B \neq 0$.
Si Q *et* R *sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de* A *par* B, *alors les diviseurs communs à* A *et* B *sont les mêmes que les diviseurs communs à* B *et* R.

Démonstration. C'est une conséquence des égalités $A = BQ + R$ et $R = A - BQ$.

Théorème 3.3.10 *Soient A et B deux polynômes de $K[X]$. Il existe un unique polynôme nul ou unitaire D de $K[X]$ dont les diviseurs sont les diviseurs communs de A et B ; c'est-à-dire tel que l'on ait :*

$$\forall P \in K[X],\ (P|A \text{ et } P|B) \Longleftrightarrow P|D).$$

De plus, il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.
Le polynôme D est appelé le plus grand commun diviseur de A et B et noté

$$D := pgcd(A, B) \text{ où } D := A \wedge B.$$

Démonstration. Existence : démontrons par réccurence sur n que si $degB < n$ alors pour tout polynôme A, il existe un polynôme D dont les diviseurs sont les diviseurs communs de A et B, ainsi que U et V tels que $AU + BV = D$.
► Si $n = 0$, alors $B = 0$, il suffit de prendre $D = A,\ U = 1$ *et* $V = 0$.
► Supposons le résultat vrai pour n. Soient B de degré $< n + 1$ *et* A quelconque.
Si $degB < n$, l'hypothèse de réccurence donne immédiatement le résultat. Sinon, B est non nul ; soient respectivement Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B. Comme $degR < degB$, on a $degR < n$ et l'hypothése de réccurence nous donne l'existence d'un polynôme D dont les diviseurs sont les diviseurs de R et$B$, ainsi que U_1 et V_1 tels que

$$(*)\ BU_1 + RV_1 = D.$$

D'après la Proposition 3.9, les diviseurs communs de A et B sont les mêmes que ceux communs de B et R, et donc sont les diviseurs de D. D'autres part, la relation $(*)$ donne $D = BU_1 + (A - BQ)V_1$.
Alors, $D = AV_1 + B(U_1 - QV_1)$.
Donc, $U = V_1$ et $V = U_1 - QV_1$ convient.
Pour l'unicité, il suffit de remarquer que s'il y a deux polynômes nuls ou unitaires D et D' qui satisfont cette propriété alors $D|D'$ et $D'|D$. Alors $D = D'$

Remarque 3.3.11 *Comme pour le cas des entiers, le calcul du pgcd est basé sur l'algorithme d'Euclide.*

Appliquons cette méthode aux deux exemples suivants :

Exemple 3.3.12 *Calculons le pgcd de* $P = X^3 + 2X^2 - X - 2$ *et* $Q = X^2 + 4X + 3$.
On a

$$X^3 + 2X^2 - X - 2 = (X^2 + 4X + 3)(X - 2) + 4X + 4, \ et$$

$$X^2 + 4X + 3 = (4X + 4)(\frac{1}{4}X + \frac{3}{4}).$$

Donc,

$$pgcd(P, Q) = pgcd(Q, 4X + 4) = X + 1.$$

Exemple 3.3.13 *Trouvons* $P \wedge Q$, *où* $P = 2X^3 - 4X^2 - X + 2$,
$Q = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$.
Posons

$$R_0 = Q. \ \ P = Q_1R_0 + R_1, \ où \ Q_1 = 2, \ R_1 = 2X^2 - 7X + 6$$

$$P \wedge R_0 = R_0 \wedge R_1.$$

$$R_0 = Q_2R_1 + R_2, \ où \ Q_2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}, \ R_2 = \frac{7}{4}X - \frac{7}{2}.$$

$$R_0 \wedge R_1 = R_1 \wedge R_2 = R_1 \wedge (X - 2).$$

$$R_1 = Q_3(X - 2) + 0, \ où \ Q_3 = 2X - 3.$$

Donc

$$P \wedge Q = X - 2.$$

Remarque 3.3.14 *Remarquons que comme pour les entiers, le pgdc est le dernier reste non nul.*

Définition 3.3.15 *Deux polynômes sont dits premiers entre eux si leur pgcd est* 1 *(c-à-d ; les seuls diviseurs communs de* A *et* B *sont les constantes).*

Exemple 3.3.16 (1) *Soient* a *et* b *deux éléments distincts de* $\mathbb{K}$. *Si* p *et* q *sont deux entiers naturels, les polynômes* $A = (X - a)^p$ *et* $B = (X - b)^q$ *sont premiers entre eux puisque les diviseurs unitaires de* A *sont les polynômes*
$(X - a)^k$, *avec* $k \leq p$, *et que parmi eux, seul 1 divise* B.
(2) $A = 0$, *alors* A *et* B *sont premier entre eux si et seulement si le polynôme* B *est constant non nul.*

Proposition 3.3.17 (Identité de Bézout) *Les polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existent U et V de $K[X]$ tels que $AU + BV = 1$.*

Démonstration. Si A et B sont premiers entre eux, alors d'après Théorème de *pgcd*, il existe U et V de $K[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Si il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$, alors tout diviseur de A et B divise $AU + BV = 1$. Donc, de degré 0. On en déduit que A et B sont premier entre eux.

3.4 Racines, Racines multiples

Définition 3.4.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est racine de P alors que $P(\lambda) = 0$.*

Proposition 3.4.2 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda) \mid P$*

Démonstration. D'après Proposition 3.7, la division euclidienne de P par $(X - \lambda)$ est de la forme $P = (X - \lambda)Q + P(\lambda)$. Donc, λ est racine de P si et seulement si $(X - \lambda) \mid P$.

Exercice 3.4.3 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.*

(1) *Montrer que si $a_1, a_2, .., a_p$ sont p racines disctinctes de P, alors $\prod_i^p (X - a_i)$ divise P.*

(2) *En déduire que tout polynôme de degré n de $\mathbb{K}[X]$ ademt au plus n racines distinctes.*

Cela nous conduit à la définition des racines multiples.

Définition 3.4.4 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est racine d'ordre de multiplicité k ($k \in \mathbb{N}^*$) de P lorsque $(X - \lambda)^k$ divise P mais pas $(X - \lambda)^{k+1}$.*

Remarque 3.4.5
- *Si l'ordre de multiplicité est 1, on parle de racine simple.*
- *Si $(X - \lambda)^k \mid P$, alors l'ordre de multiplicité est au moins k.*

Si on définit la dérivation des polynômes d'une manière analogue à celle des fonctions polynomiales associées, la dérivation sur les polynômes conserve les mêmes propriétés que sur les fonctions. Et on a le résultat suivant :

Proposition 3.4.6 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, λ est racine d'ordre multiplicité au moins k ($k \in \mathbb{N}^*$) de P si et seulement si*

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(k-1)}(\lambda) = 0$$

Démonstration.
Supposons que λ est racine d'ordre multiplicité au moins k de P.
Donc, $(X-\lambda)^k \mid P$. Par suite, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que
$P = (X-\lambda)^k Q$. Donc, $P(\lambda) = 0$ et

$$P' = (X-\lambda)^{k-1}Q + (X-\lambda)^k Q' = (X-\lambda)^{k-1}(Q + (X-\lambda)).$$

Ainsi, $P'(\lambda) = 0$ et $(X-\lambda)^{k-1} \mid P'$.
En répétant la procédure par dérivation successive de P, on obtient le résultat.

Montrons par réurrence que si
$P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(k-1)}(\lambda) = 0$ alors $(X-\lambda)^k \mid P$.
Si $P(\lambda) = 0$ il es clair que $(X-\lambda) \mid P$. Alors l'assertion est vraie pour $k = 1$. Supposons qu'elle reste vraie pour k.
Soit P tel que $P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^k(\lambda) = 0$. Puisque $P(\lambda) = 0$, on a $(X-\lambda) \mid P$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)Q$. Et on a $P' = Q + (X-\lambda)Q'$. On a alors, $Q = P' - (X-\lambda)Q'$. Donc,

$$\begin{aligned} 2Q' &= P^{(2)} - (X-\lambda)Q^{(2)} \\ 3Q^{(2)} &= P^{(3)} - (X-\lambda)Q^{(3)} \\ \ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ kQ^{(k-1)} &= P^{(k)} - (X-\lambda)Q^{(k)} \end{aligned}$$

Alors, $Q(\lambda) = Q'(\lambda) = ... = Q^{(k-1)}(\lambda) = 0$.
Donc, $(X-\lambda)^k \mid Q$ et par suite $(X-\lambda)^{k+1} \mid P$.

Proposition 3.4.7 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si P admet $n+1$ racines distinctes alors $P = 0$.*

Démonstration.
Supposons $P \neq 0$ et notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ les racines distinctes de P.

On a $(X-\lambda_1) \mid P$ implique l'existence d'un polynôme P_1 tel que $P=(X-\lambda_1)P_1$. Donc, $P_1(\lambda_i)=0$ pour $i=2,..,n+1$ (en effet $\lambda_1-\lambda_i \neq$ pour tout $i\neq 1$). De même, il existe P_2 tel que $P_1=(X-\lambda_2)P_2$ et $P_2(\lambda_i)=0$ pour $i=3,..,n+1$. Donc, $P=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)P_2$.
Par récurrence, on aura un polynôme P_{n+1} tel que
$P=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_{n+1})P_{n+1}$.
Donc, $\deg P \geq n+1$. Ce qui est absurde.

3.5 Factorisation d'un polynôme

Définition 3.5.1 *Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si*

- • $\deg P \geq 1$,
- • *les seuls diviseurs de P sont les constantes non nulles et les polynômes associés de P.*

C'est-à-dire tel que P soit non constant et que pour tout $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on ait :

$$P = AB \Longrightarrow (\deg A = 0 \quad ou \quad \deg B = 0).$$

Remarques 3.5.2

1. *L'irréductibilité dépend de l'ensemble $\mathbb{K}$ dans lequel on se place. Par exemple $P=X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Par contre P est réductible dans $\mathbb{C}[X]$. En effet $(X+i) \mid P$.*
2. *Tout polynôme de degré 1 est irréductible, puisque le produit de deux polynômes non consatants est au moins de degré 2 (c-à-d, si $P=AB$ alors $1=\deg A+\deg B$, et donc $\deg A=0$ ou $\deg B=0$).*
3. *Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ possédant une racine $a\in\mathbb{K}$ est nécessairement de degré 1. En effet, il est divisible par $(X-a)$ qui lui est donc associé.*
4. *Un polynôme qui n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$ n'est pas nécessairement irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ comme le prouve l'exemple de $(X^2+1)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.*
5. *En revanche un polynôme de degré 2 ou 3 qui n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$ est irréductible, puisqu'une décomposition non triviale d'un tel polynôme utilise nécessairement un polynôme de degré 1 (c-à-d $P=AB$ implique $2,3=\deg A+\deg B$. Alors, $\deg A=1$ ou $\deg B=1$ et donc P admet une racine. Absurde.)*
6. *Un polynôme de $R[X]$ de degré 2 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si son discriminant est négatif.*

Le théorème suivant est admis :

Théorème 3.5.3 (Théorème D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ admet une racine.*

Le théorème de D'Alembert-Gauss permet de montrer que les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes non nuls de degré au plus 1. Il en résulte que :

Proposition 3.5.4 (Théorème de factorisation cas complexe) *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n et de coefficient dominant a_n, ils existent $z_1, z_2, .., z_k \in \mathbb{C}$ distincts et $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que :*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n \quad \textit{et} \quad P = a_n \prod_{i=1}^{k} (X - z_i)^{\alpha_i}$$

Démonstration.
Montrons le résultat par récurrence sur n.
► Si $P = aX + b$ avec $a \neq 0$, $P = a(X + b/a)$.
► Supposons que tout polynôme de degré au plus n se factorise comme anoncé. Soit P un polynôme de degré $n + 1$.
D'après le théorème de D'Alembert- Gauss, P a une racine complexe z_1.
Notons α_1 son odre de multiplicité. Si $\alpha_1 = n + 1$ alors $P = a_n(X - z_1)^{n+1}$.
Sinon, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - z_1)^{\alpha_1} Q$ et z_1 n'est pas une racine de Q.
On a $\deg P = \deg Q + \alpha_1$ et P et Q ont le même coefficient dominant a_n.
Par hypothèse sur Q (car $\deg Q = n + 1 - \alpha_1 \leq n$), ils existent $z_2, .., z_k \in \mathbb{C}$ distincts et différent de z_1 (car z_1 n'est pas une racine de Q) et $\alpha_2, .., \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\alpha_2 + ... + \alpha_k = \deg Q \quad \text{et} \quad Q = a_n \prod_{i=2}^{k} (X - z_i)^{\alpha_i}$$

Donc,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = \alpha_1 + \deg Q = \deg P \quad \text{et} \quad P = (X - z_1)^{\alpha_1} Q = a_n \prod_{i=1}^{k} (X - z_i)^{\alpha_i}$$

Exercice 3.5.5 *Factoriser dans* $\mathbb{C}[X]$ *les polynômes* $P = X^4 + 1$ *et* $Q = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 3.5.6 *Soit* $P = \sum_{i=0}^{n} z_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ *et* $r \in \mathbb{N}$. *On pose* $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \overline{z_i} X^i$. *Montrer que :*

1. *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \overline{P}(\overline{\alpha}) = 0$.
2. *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, α *est une racine de* P *d'ordre* r *si et seulement si* $\overline{\alpha}$ *est une racine de* $\overline{P}$ *d'ordre* r.
3. *Montrer que si les coefficient de* P *sont réels alors les racines complexes de* P *sont deux à deux conjuguées et de même ordre de multiplicité.*

Proposition 3.5.7 (Théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ **)** *Si* $P \in \mathbb{R}[X]$ *est de degré* n *et de coefficient dominant* a_n, *Alors* P *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$P = a_n \prod_{1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 - s_j X + t_j)^{\beta_j}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *sont les racines réelles de* P *avec multiplicité* $\alpha_1, ..., \alpha_p$ *et* $\beta_j \in \mathbb{N}$ *et* $s_j, t_j \in \mathbb{R}$ *avec* $s_j^2 - 4t_j < 0$

Démonstration.
Existence : On écrit la factorisation dans $\mathbb{C}$, on isole les racines réelles. Les racines restantes sont conjuguées deux à deux et de même ordre de multiplicité. On les regroupe :

$$(X - z_j)^{\beta_j} (X - \overline{z_j})^{\beta_j} = (X^2 - 2(Re(z_j)X + |z_j|^2)^{\beta_j}.$$

Ces polynômes de degré 2 sont de discriminant strictement négatif, car sans racine réelle.

Unicité : deux décompositions différentes fournissent deux décompositions différentes dans $\mathbb{C}$, ce qui est impossible.

Remarque 3.5.8
- *Dans cette factorisation comme dans la factorisation dans* $\mathbb{C}[X]$, *il ne faut pas oublier le coefficient dominant.*
- *Il est clair aussi que les irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont exactement les polynômes non nuls de degré au plus 1 et les polynômes non nuls de degré 2 de discriminant strictement négatif.*

Exemple 3.5.9 *Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, il y a essentiellement 3 méthodes. Expliquons les sur l'exemple de $X^4 + 1$.*

1. *Coefficients indéterminés : (la plus systématique) On pose $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$X^4 + 1 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$$

On développe et on identifie les coefficients. On trouve :

$$\begin{cases} a + c & = 0 \\ d + b + ac & = 0 \\ ad + bc & = 1 \\ bd & = 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = -c = \sqrt{2}$ et $b = d = 1$. Donc,

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$$

On vérifie alors que ces deux polynômes sont de discriminant négatif.

2. *Factorisation directe (la plus astucieuse) On remarque que*

$$X^4 + 1 = (X^4 + 2X^2 + 1) - 2X^2 = (X^2 + 1) - 2X^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)$$

3. *Passer par $\mathbb{C}$: On r'esoud dans $\mathbb{C}$ l'équation $(X^2)^2 + 1 = 0$ (comme vue dans le chapitre des nombre complexe). On obtient les 4 racine $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)\}$. On regroupe chaque racine et sa conjugué, pour avoir*

$$X^4 + 1 = [(X - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i))(X - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)][(X + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i))(X + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i))]$$

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Exercice 3.5.10 *Décomposer les polynômes suivants :*

1. $X^4 + X^2 + 1$
2. $X^8 + X^4 + 1$
3. $X^6 + 1$

en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$

3.6 Fractions rationnelles

Définition 3.6.1 *Une fraction rationnelle de $\mathbb{K}[X]$ est le quotient de deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Cette fraction est noteé $F := \dfrac{A}{B}$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.*
On dit que deux fractions rationnelles $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$ sont égales si $AD = BC$ (comme dans $\mathbb{Q}$)
On dit que la fraction $\dfrac{A}{B}$ est irréductible si les deux polynômes A et B sont premiers entre eux ($pgcd(A, B) = 1$).
Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est identifié à la fraction rationelle $\dfrac{P}{1}$.

Remarque 3.6.2 (Opérations sur les fractions rationnelles) *Les opérations sur les fractions rationnelles sont analogues à celles dans $\mathbb{Q}$.*

Proposition 3.6.3 *Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ admet une représentation irréductible (c-à-d, ils existent $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0$ tels que P et Q sont premiers entre eux et $F = \dfrac{P}{Q}$)*

Démonstration.
Soit $\dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On pose $D = pgcd(A, B)$. Donc, ils existent $P, Q \in K[X]$ tels que $A = DP$ et $B = DQ$. On a $AQ = BP$. Donc, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{P}{Q}$. Si R est un diviseur commun de P et Q alors RD est un diviseur commun de A et B, et donc divise D. Alors, R est une constante. Par suite P et Q sont premiers entre eux.

Définition 3.6.4 (Racines, pôles) *Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\dfrac{P}{Q}$.*

- *On appelle racine de F toute racine de P.*
- *On appelle pôle de F toute racine de Q.*
- *Si a est une racine (respectivement un pôle) de $F \neq 0$, l'ordre de multiplicité de a est l'ordre de multiplicité de a en tant que racine du polynôme P (respectivement Q).*

Attention !!!!.

— Un élément de $\mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois racine et pôle d'une fraction rationnelle.
— Les racines et les pôles d'une fraction rationnelle ne peuvent être obtenus qu'à partir d'une forme irréductible. Par exemple, $F = \dfrac{X^3-1}{X^2-1}$ n'admet 1 ni comme racine ni comme pôle, car $pgcd(X^3-1, X^2-1) = X-1$. Et donc, $F = \dfrac{X^2+X+1}{X+1}$

Définition 3.6.5 (Partie entière) *Soient $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle et $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B ($Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg B$). Alors, Q est appelé la partie entière de F et on a*

$$F = Q + \frac{R}{B}$$

On admet la proposition suivante.

Proposition 3.6.6 (Partie polaire) *Soient $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle et $a \in \mathbb{K}$ un pôle d'ordre de multiplicité n. Alors F s'écrit de manière unique de la forme*

$$F = \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(X-a)^n} + F_0$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ et a n'est pas un pôle de F_0. En plus, les pôles de F_0 sont les pôles de F sauf a, avec les mêmes ordres de multiplicité.
La quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^{\alpha_i}} = \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_p}{(X-a)^n}$$

s'appelle la partie polaire de F relative au pôle a.

Méthode pratique.

1. Si l'ordre de a est 1, on peut écrire $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{(X-a)Q}$ où Q est un polynôme n'admettant pas a pour racine. On cherche le scaliare α tel que :

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{A'}{B'}$$

En multipliant cette égalité par $X - a$ on obtient :

$$\frac{A}{Q} = \alpha + \frac{(X-a)A'}{B'}$$

ce qui, en substituant a à X, donne $\dfrac{A(a)}{Q(a)} = \alpha$.

Au lieu de perdre le temps à factoriser B par $X-a$, on peut remarquer que si $B=(X-a)Q$ alors $B' = Q + (X-a)Q'$. Donc, $B'(a) = Q(a)$. Donc, $\alpha = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$.

2. Si l'ordre de a est 2, on peut écrire $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{(X-a)^2 Q}$ où Q est un polynôme n'admettant pas a pour racine. On cherche les scalaires α et β tels que :

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{(X-a)^2} + \frac{\beta}{X-a} + \frac{A'}{B'}$$

En multipliant cette égalité par $(X-a)^2$ on obtient :

$$\frac{A}{Q} = \alpha + \beta(X-a) + \frac{(X-a)^2 A'}{B'}$$

ce qui, en substituant a à X, donne $\dfrac{A(a)}{Q(a)} = \alpha$.

On a

$$\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{(X-a)^2} = \frac{A-\alpha Q}{B} = \frac{\beta}{X-a} + \frac{A'}{B'}$$

En plus, $A(a) - \alpha Q(a) = 0$. Alors $X-a$ divise $A - \alpha Q$. Soit A_1 tel que $A - \alpha Q = (X-a)A_1$. On cherche β tel que

$\dfrac{A_1}{(X-a)Q} = \dfrac{\beta}{X-a} + \dfrac{A'}{B'}$. Cela nous ramène au premier cas.

Comme dans le premier cas, on peut montrer que $\alpha = \dfrac{2A(a)}{B^{(2)}(a)}$

Exemple 3.6.7 *Soit* $F = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$. *Les pôles de F sont 0 et 1.*

1. *La parite polaire relative à 0 est* $\dfrac{\alpha}{X}$ *avec* $\alpha = 1/1 = 1$

2. *La partie polaire relative à 1 est* $\dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{(X-1)^2}$ *avec*

   $\beta = 2/1 = 2$.

   Comme :

$$F - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X - 1}{(X-1)X}$$

   On en déduit $\alpha = 3/1 = 3$.

Théorème 3.6.8 (Décomposition en éléments simple dans $\mathbb{C}(X)$) *Soit* $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ *et soient* $a_1, a_2, ..., a_n$ *les pôles distincts de cette fraction d'ordres de multiplicité respectifs* $r_1, r_2, ..., r_n$ *. Alors,* F *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

où E *est la partie entière de* F *et les* $\lambda_{i,k}$ *sont des complexes.*

Démonstration.
L'unicité de la partie entière provient de l'unicité de la division euclidienne. En plus, pour $1 \leq j \leq n$, on a :

$$F = \sum_{k=1}^{r_j} \frac{\lambda_{j,k}}{(X - a_j)^k} + F_j \quad \text{avec} \quad F_j := E + \sum_{i \neq j} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

Il est clair que la fraction F_j n'admet pas a_j pour pôle. Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r_j} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_j)^k}$ est la partie polaire relative au pôle a_j. D'où l'unicité de $\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, ..., \lambda_{j,r_j}$.

On montre l'existence par récurrence sur n le nombre des pôles.

► Si F admet un seul pôle a d'ordre r. Alors, par Proposition 6.6

$$F = \frac{\lambda_1}{X - a} + \frac{\lambda_2}{(X - a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(X - a)^r} + \frac{A'}{B'}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ et $\dfrac{A'}{B'}$ irréductible et n'admet aucun pôle. Donc, B' est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ qui n'admet aucune racine. Alors, c'est une constante non nulle. Donc, $E := \dfrac{A'}{B'} \in \mathbb{C}[X]$. Alors, $(*)$ $\quad A = B(\dfrac{\lambda_1}{X - a} + \dfrac{\lambda_2}{(X - a)^2} + \cdots + \dfrac{\lambda_r}{(X - a)^r}) + BE$. Or, $(X - a)^r$ divise B. Donc, $R = B(\dfrac{\lambda_1}{X - a} + \dfrac{\lambda_2}{(X - a)^2} + \cdots + \dfrac{\lambda_r}{(X - a)^r}) \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg R < \deg B$. Alors,
$(*)$ est la division euclidienne de A par B. Ainsi, E est la partie entière de F.

► Supposons la propriété (existence) vraie pour les fraction de n pôles distincts et soit F de $n + 1$ pôles distincts $a_1, a_2, .., a_{n+1}$ d'ordre $r_1, r_2, .., r_{n+1}$ respectivement. Donc,

$$F = \frac{\lambda_{1,1}}{X - a_1} + \frac{\lambda_{1,2}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1,r}}{(X - a_1)^{r_1}} + \frac{A'}{B'}$$

où $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \ldots, \lambda_{1,p} \in \mathbb{C}$ et $\dfrac{A'}{B'}$ irréductible et ses pôles sont $a_2, .., a_{n+1}$ d'ordre $r_2, .., r_{n+1}$ respectivement. Alors, par hypothèse de récurrence, $\dfrac{A'}{B'}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\frac{A'}{B'} = E + \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

où E est la partie entière de $\dfrac{A'}{B'}$ et les $\lambda_{i,k}$ sont des complexes.

Alors,

$$\frac{A}{B} = \sum_{k=1}^{r_1} \frac{\lambda_{1,k}}{(X - a_1)^k} + E + \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right) = E + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

Or, $(X - a_i)^{r_i}$ divise B pour $i = 1, .., n+1$. Donc, $R = B\left(\sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right) \right) \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg R < \deg B$. En outre, $A = BE + R$. Alors, par unicité de la division euclidienne de A par B, E est la partie entière de F.

Exemple 3.6.9 *(1) La partie entière de* $F = \dfrac{X^5 + 1}{X(X - 1)^2}$ *est* $X^2 + 2X + 3$. *Exemple 3.6.7, nous donne donc :*

$$F = X^2 + 2X + 3 + \frac{1}{X} + \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{3}{X - 1}.$$

(2) Soit $F = \dfrac{1}{X^5 - 1}$. *Les pôles de* F *sont* $1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}$. *La partie polaire relative au pôle* $\omega_k = (e^{2i\pi/5})^k$ *(avec* $k = 0, 1, 2, 3, 4$*) est* $\dfrac{\alpha_k}{X - \omega_k}$ *où* $\alpha_k = \dfrac{A(\omega_k)}{B'(\omega_k)}$ *avec* $A = 1$ *et* $B = X^5 - 1$. *Donc,* $\alpha_k = \dfrac{1}{5(\omega_k)^4} = \dfrac{\omega_k}{5}$. *Alors, puisque la partie entière est nulle, on a :*

$$F = \sum_{k=0}^{4} \frac{\omega_k}{5(X - \omega_k)}$$

Méthode pratique pour décomposer une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes dont les pôles sont $a_1, a_2, ..., a_n$ d'ordre respectifs $r_1, r_2, .., r_n$. Sa décomposition est de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right)$$

Les coefficients λ_{i,r_i} se calculent immédiatement
a l'aide des formules :

$$\lambda_{i,r_i} = \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)} = \frac{r_i! P(a_i)}{Q^{(r_i)}(a_i)}$$

avec $Q = (X - a_i)^{r_i} Q_i$.

Si tous les pôles sont simples, on a ainsi la décomposition en éléments simples. Sinon, on retranche à F chaque fraction $\dfrac{\lambda_{i,r_i}}{(X - a_i)^{r_i}}$ et on recommence. Mais, il est souvent beacoups plus rapide de déterminer les derniers coefficient en utilisant les méthodes suivantes :

Si la fraction est à coefficients réels.. Si a est un pôle non réel de F d'ordre r, alors $\overline{a}$ est aussi pôle d'ordre r et les coefficients des parties polaires associés à a et $\overline{a}$ sont conjugués deux à deux.

Si la fraction est paire ou impaire.. Si une fraction rationnelle est paire ou impaire, sa décomposition doit refléter cette propriété. On en déduit alors des relations sur les coefficients (le nombres d'inconnues diminue environ de moitié).

Utilisation de la méthode $\lim\limits_{x \to \infty} xF(x)$.. Supposons que $\deg P < \deg Q$.
Si la fonction $x \mapsto xF(x)$ à une limite finie en l'infini, on peut ainsi trouver des relations entre les coefficients des termes en $\dfrac{1}{X - a_i}$ de la décomposition de F.

S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer.. Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à calculer, on peut substituer à X une ou deux valeurs simples.

Exemple 3.6.10 *La fraction $F = \dfrac{4}{(X^2 - 1)^2}$ se décompose en éléments simple sous la forme :*

$$F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{(X - 1)^2} + \frac{d}{(X + 1)^2}$$

On a :

$$F(X) = F(-X) = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1} + \frac{c}{(-X-1)^2} + \frac{d}{(-X+1)^2} = \frac{-a}{X+1} + \frac{-b}{X-1} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{}{(X}$$

Donc, $a = -b$ *et* $c = d$*. En outre,* $c = \dfrac{4}{(1+1)^2} = 1$*. Donc,* $c = d = 1$*. En plus,* $4 = F(0) = -a + b + c + d = -a + b + 2$*. Alors,* $b - a = 2$*. Ainsi,* $b = 1$ *et* $a = -1$*. Par suite,*

$$F = -\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2}$$

On admet le théorème suivant :

Théorème 3.6.11 (Décomposition en éléments simple dans $\mathbb{R}(X)$) *Soit* $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ *une fraction irréductible. On pose* $B = b_n \prod_{1}^{p} (X - a_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 - s_j X + t_j)^{\beta_j}$ *où* $a_1, ..., a_p$ *sont les racines réelles de* B *avec multiplicité* $r_1, ..., r_p$ *et* $\beta_j \in \mathbb{N}$ *et* $s_j, t_j \in \mathbb{R}$ *avec* $s_j^2 - 4t_j < 0$*, la décomposition de* B *en élément irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$*. Alors,* $\dfrac{A}{B}$ *s'écrit de manière unique sous la fomre :*

$$\frac{A}{B} = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - a_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{\beta_j} \frac{\alpha_{j,k} + \beta_{j,k} X}{(X^2 - s_j X + t_j)^k} \right)$$

où E *est la partie entière de* $\dfrac{A}{B}$ *et les* $\lambda_{i,k}, \alpha_{j,k}, \beta_{j,k}$ *sont des réels.*

Exercice 3.6.12 *Décomposer en éléments simple dans* $\mathbb{C}[X]$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$ *les fractions suivantes :*

1. $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$
2. $F = \dfrac{2(X-2)}{(X^2+1)^2}$

3.7 Supplément de cours

Définition 3.7.1 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On note* $\mathbb{K}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes de degré au plus* n *;*

$\mathbb{K}_n[X] := \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ degP \leq n\}$

Remarque 3.7.2 $(\mathbb{K}_n[X], +, .)$ *est un sous espace vectoriel de* $(\mathbb{K}[X], +, .)$

Proposition 3.7.3 ((Identité de Bézout)) *Les polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe U et V de $\mathbb{K}[X]$ tel que $AU + BV = 1$.*

Démonstration. Si A et B sont premiers entre eux, alors d'après Théorème 3.10, il existe U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.
S'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$, alors tout diviseur D de A et B divise $AU + BV = 1$. Donc, D est de degré 0. On en déduit que A et B sont premiers entre eux.

Théorème 3.7.4 ((Formule de Taylor pour les polynômes)) *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

.

Démonstration. Par un procédé de récurrence, on vérifie d'abord que si $\lambda \in \mathbb{K}$, $n, k{\in}N^*$, alors

$$[(X - \lambda)^n]^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X)^{n-k}.$$

Écrivons maintenant

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Alors

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X - \alpha + \alpha)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{k=0}^{i} \left(\begin{array}{c} i \\ k \end{array} \right) (X - \alpha)^k \alpha^{i-k}$$

Ainsi, il existe $\lambda_0, ..., \lambda_n \mathbb{K}$, tel que

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X - \alpha)^i.$$

Trouvons ces coefficients λ_i en dérivant successivement P. On a

$$P^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i [(X-)^i]^{(k)}.$$

Donc
$$P^{(k)}(X) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i \frac{i!}{(i-k)!}(X-)^{i-k}.$$
D'où,
$$P^{(k)}(\alpha) = k!\lambda_k.$$
Et on déduit l'égalité désirée.

Proposition 3.7.5 *Soient $A,\ B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls. Alors il existe un et un seul polynôme unitaire M de plus petit degré vérifiant A/M et B/M. De plus, si $M_0 \in \mathbb{K}[X]$ et A/M_0 et B/M_0, alors M/M_0.*

Notation. Avec les notations de la proposition ci-dessus, M est noté *ppcm*(A, B) ou $A \vee B$.
Démonstration. Pour simplifier, supposons que A et B sont unitaires. Donc le produit AB est aussi unitaire.
Supposons d'abord que $A \wedge B = 1$. Alors il existe $U,\ V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $UA + BV = 1$. Montrons que $A \vee B = AB$. On a A/AB et B/AB. Si M_0 est un multiple commun de A et B, alors $M_0 = UAM_0 + VBM_0$. Par suite AB/M_0.
Supposons maintenant que $A \wedge B = D \in \mathbb{K}[X]$. Écrivons $A = DA_0$ et $B = DB_0$ où $A_0,\ B_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $A_0 \vee B_0 = A_0B_0$, puisque $A_0 \wedge B_0 = 1$.
Montrons que $A \vee B = DA_0B_0$.
On a A/DA_0B_0 et B/DA_0B_0. De plus, si M_0 est un multiple de A et B, alors D/M_0.
Écrivons $M_0 = DM''$ où $M'' \in \mathbb{K}[X]$. Alors M'' est un multiple commun de A_0 et B_0, par suite A_0B_0/M''. D'où, DA_0B_0/M_0.

Exemple 3.7.6 *Soient $A = X+1$ et $B = X-3$ dans $\mathbb{K}[X]$. Alors $A \vee B = (X+1)(X-3)$.*

3.8 Solutions des exercices

Exercice 3.8 . Soient Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)(X-2)$. Donc,
$$P = X(X-1)(X-2)Q + R \qquad \text{et} \qquad \deg R \leq 2$$

Alors, $R(0) = P(0) = 1$ et $R(2) = P(2) = 1$ et $R(1) = P(1) = 2$. On pose $R = aX^2+bX+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Il est clair que $c = 1$ car $R(0) = 1$. En outre,

$$\left\{\begin{array}{ll} R(2) & =1 \\ R(1) & =2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 4a+2b+1 & =1 \\ a+b+1 & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} a & =-1 \\ b & 2 \end{array}\right.$$

Par suite, $R = -X^2 + 2X + 1$.

Exercice 4.3 . (1) La démonstration sera par récurrence sur p (le nombre des racine).

▶ Si $p = 1$, le résultat découle de Proposition 4.2.

▶ Supposons la propriété vraie pour p, et démontrons le pour $p+1$. Soient $a_1, a_2, ..., a_{p+1}$ des racines distinctes d'un polynôme A. D'après l'hypothèse de réccurence, $\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$ divise A. Alors, il existe $B \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$$

Comme a_{p+1} est racine de A, on a

$$0 = B(a_{p+1})\prod_{i=1}^{p}(a_{p+1} - a_i)$$

ce qui prouve que $B(a_{p+1}) = 0$. Alors, $(X - a_{p+1}) \mid B$. Donc, il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$B = (X - a_{p+1})C$$

Alors,

$$A = B\prod_{i=1}^{p}(X - a_i) = C(X - a_{p+1})\prod_{i=1}^{p}(X - a_i) = C\prod_{i=1}^{p+1}(X - a_i)$$

(2) Soit P un polynôme de degré n. Supposons que P admet $n+1$ racines distinctes $a_1, a_2, .., a_{n+1}$. Alors, d'après (1), $\prod_{i=1}^{n+1}(X - a_i)$ divise P. C'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = Q\prod_{i=1}^{n+1}(X - a_i)$$

D'où, $\deg P = \deg Q + n + 1 > n$. Absurde.

Exercice 5.5 . (1) Factorisation de $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$: On pose $x = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

$$x^4 + 1 = 0 \Longleftrightarrow e^{4i\theta} = e^{i\pi} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Donc, les racines de P sont

$$\begin{cases} z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\overline{z_1} \\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{z_2} = -z_1 \\ z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{z_1} \end{cases}$$

Donc,

$$P = (X - z_1)(X - \overline{z_1})(X + z_1)(X + \overline{z_1})$$

(1) Factorisation de $Q = X^4 + X^2 + 1$: Il suffir de chercher les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2+x+1 = 0$ et déduire celles de l'équation $x^4+x^2+1 = 0$, et ainsi factoriser Q.

Exercice 5.6. (1) Si α est une racine de P alors $\sum_{i=0}^{n} z_i\alpha^i = 0$. Donc, $\overline{\sum_{i=0}^{n} z_i\alpha^i} = 0$. Ainsi, $\sum_{i=0}^{n} \overline{z_i}\overline{\alpha}^i = 0$. Par suite, $\overline{P}(\overline{\alpha}) = 0$.
Inversement, si $\overline{\alpha}$ est une racine de $\overline{P}$, alors par ce que précéde $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ est une racine de $\overline{\overline{P}} = P$.

(2) Il est clair que pour tout polynôme $A = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i = 0 \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$(\overline{A})' = \sum_{i=1}^{n} i\bar{a}_iX^{i-1} = \overline{A'}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Le complexe α est une racine de P d'ordre r si et seulement si

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^k(\lambda) \neq 0$$

C'est-à-dire en conjuguant :

$$\overline{P}(\bar{\lambda}) = \overline{P'}(\bar{\lambda}) = ... = \overline{P^{(k-1)}}(\bar{\lambda}) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{P^k}(\bar{\lambda}) \neq 0$$

Ce qui est equivaut à :

$$\overline{P}(\bar{\lambda}) = (\overline{P})'(\overline{\lambda}) = ... = (\overline{P})^{(k-1)}(\overline{\lambda}) = 0 \quad \text{et} \quad (\overline{P})^k(\overline{\lambda}) \neq 0$$

C-à-dire que $\overline{\alpha}$ est une racine de $\overline{P}$ d'ordre r

(3) Si les coefficients de P sont réels et α une racine complexe (non réel) de P, alors par (1), $\overline{\alpha}$ est une racine de $\overline{P}$. Or, $\overline{P} = P$. Donc, $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P. Donc, les racines de P sont deux à deux conjuguées. Si α est une racine multiple d'orde r, alors par (2), $\overline{\alpha}$, est aussi une racine multiple de $\overline{P} = P$ de même ordre.

Exercice 5.10.

1. Factorisation de $X^4 + X^2 + 1$

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 \\ &= (X^2 + 1)^2 - X^2 \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

2. Factorisation de $X^8 + X^4 + 1$

$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= X^8 + 2X^4 + 1 - X^4 \\ &= (X^4 + 1)^2 - X^4 \\ &= (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

3. Factorisation de $X^6 + 1$

$$\begin{aligned} X^6 + 1 &= (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

Exercice 6.12.

(1) Décomposer en éléments simple dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ la fractions $F = \dfrac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}$:
La partie entière est nulle et les pôles sont $i, -i, 2, -2$. Alors, F est écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+2}$$

avec

$$\begin{cases} a = \dfrac{10i^3}{(i+i)(i^2-4} = \dfrac{-10i}{-10i} = 1 \\ b = \overline{a} = 1 \\ c = \dfrac{10(2)^3}{(4+1)(2+2)} = 4 \\ d = \dfrac{10(-2)^3}{(4+1)(-2-2)} = 4, \end{cases}$$

Donc,

$$F = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} + \frac{4}{X-2} + \frac{4}{X+2}$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$F = \frac{2X}{X^2+1} + \frac{4}{X-2} + \frac{4}{X+2}$$

(2) Décomposer en éléments simple dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ la fractions $F = \dfrac{2(X-2)}{(X^2+1)^2}$:
La partie entière est nulle, et les pôles sont i et $-i$ d'ordre 2 (tous les deux). La décomposition est alors de la forme :

$$F = \frac{a}{(X-i)^2} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X+i)^2} + \frac{d}{X+i}$$

avec $a = \dfrac{2(i-2)}{4i^2} = \dfrac{2-i}{2}$ et $c = \bar{a} = \dfrac{2+i}{2}$

On donne a X la valeur 0, on obtient $-4 = -a - c + bi - di$. Donc, $2i = b - d$. De même on donne à X la valeur 2, on obtient $0 = b + d$. Alors, $b = i$ et $d = -i$. Par suite,

$$F = \frac{2-i}{2(X-i)^2} + \frac{i}{X-i} + \frac{2+i}{2(X+i)^2} + \frac{-i}{X+i}$$